

# MST33-Dynamique linéaire des fluides incompressibles

Olivier Cadot

► **To cite this version:**

Olivier Cadot. MST33-Dynamique linéaire des fluides incompressibles. École d'ingénieur. MST33-Dynamique linéaire des fluides incompressibles, ENSTA-ParisTech, France. 2015, pp.32. cel-01228139

**HAL Id: cel-01228139**

**<https://hal-ensta-paris.archives-ouvertes.fr//cel-01228139>**

Submitted on 12 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES*

**Polycopié de Cours**

1ère année cycle ingénieur

de l'ENSTA-ParisTech

**MST33-Dynamique linéaire des fluides incompressibles**

**Olivier CADOT**

Unité de Mécanique (UME), Dynamique des Fluides et Acoustique (DFA)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Rappel sur les équations du mouvement . . . . .	3
1.2	Origine des forces visqueuses . . . . .	5
1.2.1	Gaz . . . . .	5
1.2.2	Liquide . . . . .	5
1.3	Quand la dynamique des écoulements devient-elle linéaire ? . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Écoulements unidirectionnels et quasi-unidirectionnels</b>	<b>7</b>
2.1	Écoulements parallèles plans . . . . .	7
2.1.1	Géométrie de Couette . . . . .	7
2.1.2	Géométrie de Poiseuille . . . . .	8
2.1.3	Géométrie mixte . . . . .	8
2.2	Écoulements quasi-parallèles, approximation de lubrification . . . . .	9
2.2.1	Expériences . . . . .	9
2.2.2	Approximation de lubrification . . . . .	9
2.2.3	Equation de Reynolds . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Équations de Stokes</b>	<b>12</b>
3.1	Introduction sur les écoulements à petit nombre de Reynolds . . . . .	12
3.2	Différentes formes des équations . . . . .	12
3.3	Propriétés des équations . . . . .	13
3.3.1	Unicité . . . . .	13
3.3.2	Réversibilité . . . . .	13
3.3.3	Invariance des lignes de courant et additivité . . . . .	13
3.3.4	Minimum de dissipation . . . . .	15
3.3.5	Prédictions dimensionnelles et efforts fluides . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Solutions singulières</b>	<b>18</b>
4.1	Solution générale des équations de Stokes . . . . .	18
4.2	Stokeslet . . . . .	18
4.3	Dipôle . . . . .	19
4.4	Méthode des singularités . . . . .	21

<b>5</b>	<b>Écoulements de Stokes autour de corps simples</b>	<b>22</b>
5.1	Sphère . . . . .	22
5.1.1	Champ de vitesse . . . . .	22
5.1.2	Champ de pression . . . . .	23
5.1.3	Coefficient de traînée . . . . .	23
5.1.4	Paradoxe de Stokes, approximation d'Oseen . . . . .	23
5.2	Force exercée sur un cylindre de longueur finie . . . . .	24
5.2.1	Cylindre perpendiculaire à la direction du mouvement . . . . .	25
5.2.2	Cylindre parrallèle à la direction du mouvement . . . . .	26
5.2.3	Cylindre en mouvement quelconque . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Application à la bio-mécanique</b>	<b>28</b>
6.1	Observations sur la mobilité des micro-organismes . . . . .	28
6.2	Force fluide locale pour un flagelle et un cil . . . . .	28
6.3	Théorie résistive de la propulsion ondulatoire . . . . .	28
6.3.1	Modélisation du mouvement et du flagelle . . . . .	30
6.3.2	Force totale du fluide sur le flagelle . . . . .	30
6.3.3	Efficacité de propulsion . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>32</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Rappel sur les équations du mouvement

On note  $\vec{v}(x, y, z, t)$  la vitesse instantanée locale du fluide, avec la notation vectorielle suivante :

$$\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z, \quad (1.1)$$

ou la notation tensorielle :

$$\vec{v} = v_i\vec{e}_i, \quad (1.2)$$

où  $i = 1, 2, 3$  pour x,y,z respectivement. La notation tensorielle implique la sommation sur les deux indices répétés.

On écrit la relation fondamentale de la dynamique (RFD) pour un volume matériel  $\Omega$ , grisé sur la figure 1.1 et de surface  $\Sigma$ . Le fluide est supposé incompressible. Dans son mouvement, le volume subit des variations de quantité de mouvement provenant des forces extérieures de surface et de volume :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{v} dV = \rho \iiint_{\Omega} \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iint_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS + \iiint_{\Omega} \rho \vec{f} dV. \quad (1.3)$$

La  $i$ -ème composante de la RFD (Eq. 1.3) s'écrit :

$$\rho \iiint_{\Omega} \frac{dv_i}{dt} dV = \iint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS + \iiint_{\Omega} \rho f_i dV. \quad (1.4)$$

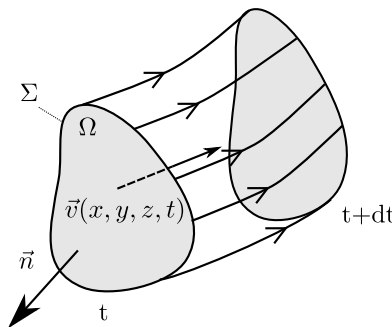


FIGURE 1.1 – Evolution d'un volume matériel.

Comme le premier terme (flux de la contrainte) du membre de droite se transforme en une intégrale de divergence par le théorème d'Ostrogradski :

$$\iint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_{\Omega} \partial_j \sigma_{ij} dV, \quad (1.5)$$

l'expression locale de la RFD donne :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \partial_j \sigma_{ij} + \rho f_i. \quad (1.6)$$

Le membre de gauche représente la dérivée particulaire, dont une simple différenciation permet d'écrire

$$dv_i = \partial_j v_i dx_j + \partial_t v_i dt, \quad (1.7)$$

soit que

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho v_j \partial_j v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (1.8)$$

L'état des contraintes totales dans le fluide est donné par le tenseur  $\sigma_{ij}$  dans lequel on fait apparaître la partie isotrope, définissant ainsi la pression  $p$  du fluide<sup>2</sup> :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (1.9)$$

Pour un fluide newtonien,

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} ; \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (1.10)$$

représente la contrainte visqueuse dépendant de la viscosité dynamique du fluide  $\mu$ . Dimensionnellement,  $\mu$  est une pression divisée par un temps, ce qui s'exprime en Pa/s dans le système S.I. Le calcul de la divergence du tenseur des contraintes totales fournit<sup>3</sup> :

$$\partial_j \sigma_{ij} = 2\mu \left( \frac{1}{2}(\partial_j \partial_j v_i + \partial_j \partial_i v_j) - \partial_i p \right) = \mu \Delta v_i - \partial_i p \quad (1.11)$$

Finalement on obtient la i-ème composante des équations de Navier-Stokes en injectant Eq. (1.11) et Eq. (1.8) dans la RFD (Eq. 1.6) :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \partial_j v_i = -\partial_i p + \mu \Delta v_i \quad (1.12)$$

$$\partial_i v_i = 0, \quad (1.13)$$

ce qui s'écrit en notation vectorielle :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} \quad (1.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.15)$$

et à laquelle il faut ajouter les conditions aux limites  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{solide}}$  sur les parois.

- 
1. on utilise la notation  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$
  2.  $\delta_{ij=i} = 1, \delta_{ij \neq i} = 0$
  3. l'incompressibilité du fluide impose  $\partial_j v_j = 0$

## 1.2 Origine des forces visqueuses

L'origine des forces visqueuses dépend de l'état microscopique du fluide et notamment des interactions entre ses constituants. Il faut donc distinguer deux cas, celui du gaz et celui du liquide pour lesquels ces interactions sont très différentes.

### 1.2.1 Gaz

Les gaz se caractérisent par la quasi-absence d'interaction entre les molécules sauf lorsque celles-ci entrent en collision. Ce sont donc ces collisions qui sont à l'origine du transfert de quantité de mouvement par viscosité dans un gaz. Deux couches fluides de vitesses macroscopiques différentes s'entraînent l'une l'autre par un échange de molécules. Le moteur de cet échange est l'agitation thermique caractérisée par la vitesse  $v^*$ , ainsi une molécule d'une couche fluide "rapide", en pénétrant dans une couche "lente" communiquera par collision une augmentation de la quantité de mouvement, et vice versa : une molécule de la couche lente communiquera par collision une réduction de la quantité de mouvement de la couche "rapide". C'est la théorie cinétique des gaz qui permet de développer une expression pour la viscosité dynamique d'un gaz. Pour un gaz parfait, elle donne :

$$\mu \propto \rho v^* \ell, \quad (1.16)$$

où la vitesse d'agitation thermique  $v^*$  dépend de la température  $T$ , de la constante de Boltzmann  $K$  et de la masse  $m$  des molécules,  $v^* \propto \sqrt{\frac{KT}{m}}$ . Le libre parcours moyen  $\ell$  représente la distance moyenne parcourue par les molécules entre deux collisions. Il est inversement proportionnel au nombre de molécules par unité de volume  $n = \rho/m$  et d'un paramètre géométrique  $\sigma_{\text{eff}}$  appelé section efficace équivalent à une "surface projetée" des molécules.

$$\ell = \frac{1}{n\sigma_{\text{eff}}} = \frac{m}{\rho\sigma_{\text{eff}}}. \quad (1.17)$$

On voit à partir de Eq. (1.16) et Eq. (1.17), que la viscosité dynamique d'un gaz augmente comme la racine carrée de la température :

$$\mu \propto \frac{\sqrt{mKT}}{\sigma_{\text{eff}}}. \quad (1.18)$$

Il est donc d'autant plus facile d'entraîner un gaz que sa température est grande conformément à l'origine physique décrite ci-dessus.

### 1.2.2 Liquide

Un liquide peut être vu comme un solide amorphe capable de se réorganiser sur des temps caractéristiques suffisamment courts pour pouvoir s'écouler. La mobilité des molécules autorise cette réorganisation et se trouve donc être à l'origine de la viscosité du liquide. Pour se déplacer vers un espace lacunaire, une molécule doit franchir une barrière de potentiel  $\Delta g_0$  produite par les interactions avec ses plus proches voisins (associées aux forces de van der Waals pour l'eau). Le saut sera d'autant plus difficile à réaliser que la barrière énergétique est haute. C'est l'énergie thermique qui permet le franchissement de la barrière, et plus l'agitation thermique

(i.e. la température) est grande et plus la mobilité sera grande. La théorie quantique couplée à la physique statistique permet de développer un modèle de viscosité pour un liquide :

$$\mu = \frac{\hbar}{\alpha} \exp\left(\frac{\Delta g_0}{KT}\right). \quad (1.19)$$

On voit bien que par rapport à un gaz (Eq. 1.18), l'effet de la température est contraire : la viscosité des liquides diminue quand la température augmente, conformément à la description microscopique décrite ci-dessus.

### 1.3 Quand la dynamique des écoulements devient-elle linéaire ?

Le terme  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  dans les équations de Navier-Stokes (Eq. 1.14) est la source non linéaire de la dynamique. Il existe trois cas pour lesquels ce terme s'annule rendant ainsi linéaire, l'équation de la dynamique.

#### a) Écoulement unidirectionnel

S'il n'existe qu'une seule direction de l'écoulement, par exemple suivant  $x$ , alors  $v = w = 0$  et le terme non linéaire  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = u \cdot \partial_x u \vec{e}_x = \vec{0}$  puisque l'incompressibilité impose ici que  $\partial_x u = 0$ .

#### b) Écoulement quasi-unidirectionnel

Au lieu d'être rigoureusement parallèles, les lignes de courant peuvent présenter un léger angle de divergence  $\theta$  en radians. On verra que dans ce cas le terme non linéaire  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  devient négligeable dans les équations de Navier-Stokes (Eq. 1.14) si le nombre de Reynolds de l'écoulement  $Re < \frac{1}{\theta}$  : c'est l'hypothèse de lubrification. La dimension caractéristique pour le calcul du nombre de Reynolds est la largeur du canal.

#### c) Écoulement de Stokes, $Re \rightarrow 0$

Il n'y a pas de condition sur la géométrie de l'écoulement comme pour les deux cas précédents. Les forces visqueuses  $\mu \Delta \vec{v}$  sont infiniment grandes devant les forces inertielles  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  qui deviennent négligeables dans les équations de Navier-Stokes (Eq. 1.14).

#### d) Terme instationnaire

Pour les trois cas donnés ci-dessus, il subsiste le terme instationnaire  $\partial_t \vec{v}$ . Il peut être négligé si le temps caractéristique du forçage  $T$  de l'écoulement est plus grand que le temps caractéristique pour diffuser la quantité de mouvement par viscosité  $\tau_\nu = L^2/\nu$  dans tout le volume de l'écoulement, de taille  $L$ . C'est ce qu'on appelle une hypothèse quasi-statique, puisque chaque instant est solution d'un état stationnaire pour des conditions aux limites variant lentement avec le temps. Dans le cas des écoulements de Stokes, cas c), l'hypothèse quasi-statique devient naturelle puisque l'hypothèse  $Re \rightarrow 0$ , implique que le transport par viscosité  $\tau_\nu \ll$  tous temps caractéristiques : l'écoulement réagit donc instantanément à tous changements de conditions aux limites.



## Chapitre 2

# Écoulements unidirectionnels et quasi-unidirectionnels

### 2.1 Écoulements parallèles plans

C'est une géométrie purement bidimensionnelle qui correspondrait à un écoulement entre deux plaques parallèles dans le plan  $z = 0$  et séparées d'une distance  $d$ . La condition d'écoulement unidirectionnel entre les plaques se traduit par  $\vec{v} = u(y)\vec{e}_x$  et l'équation de Navier Stokes devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Il sera commode d'oublier le détail de la forme du profil solution de Eq. 2.1 pour se ramener à un problème à une seule dimension en considérant le débit (par unité de longueur transverse) le long de la direction  $x$  de l'écoulement :

$$Q(x) = \int_0^d u(y)dy, \quad (2.3)$$

qui, pour un écoulement unidirectionnel ne peut avoir de dépendance en  $x$ . Nous verrons plus loin que ce ne sera pas le cas des écoulements quasi-unidirectionnels.

#### 2.1.1 Géométrie de Couette

Le fluide est mis en mouvement uniquement par la vitesse relative des deux plaques. On se place dans le référentiel où la plaque inférieure est immobile (Fig. 2.1). Comme il n'y a pas de gradient de pression dans la direction  $x$  pour effectuer cet écoulement,  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , la solution est d'après Eq. 2.1 :

$$u(y) = U_0 \frac{y}{d}, \quad (2.4)$$

et

$$Q(x) = \frac{U_0 d}{2}, \quad (2.5)$$

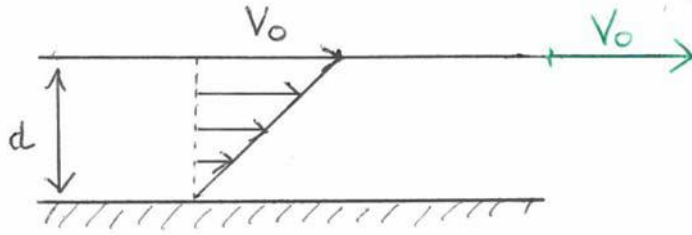


FIGURE 2.1 – Écoulement unidirectionnel en géométrie de Couette.

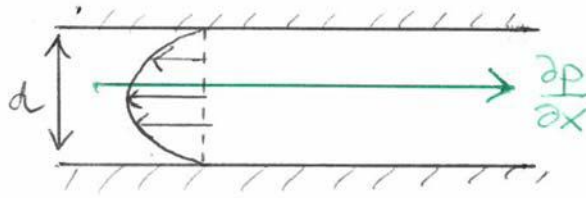


FIGURE 2.2 – Écoulement unidirectionnel en géométrie de Poiseuille.

La force par unité de surface exercée sur le plan de normale  $\vec{n} = \vec{e}_y$  et dans la direction  $x$  du mouvement se calcule à partir de l'état des contraintes résultant des gradients du profil de la vitesse à la paroi :

$$f_i = \sigma_{ij}n_j \quad ; \quad f_x = \sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{\text{paroi}}} + 0 \right) \quad (2.6)$$

La force visqueuse pour la plaque inférieure est donc  $f_x = \mu \frac{U_0}{d}$  et,  $-f_x$  pour la plaque supérieure car sa normale est  $-\vec{e}_y$ .

### 2.1.2 Géométrie de Poiseuille

Cette fois-ci les deux parois sont immobiles et c'est un gradient de pression  $\frac{\partial p}{\partial x}$  constant le long de la direction  $x$  qui met en mouvement le fluide (Fig. 2.2). La pression ne variant pas sur la verticale implique que  $\frac{\partial p}{\partial x}$  est aussi indépendant de  $y$ . D'après l'Eq. 2.1 :

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}y(d-y)\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.7)$$

et

$$Q(x) = -\frac{d^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.8)$$

La solution est un profil parabolique dont le mouvement est opposé au gradient de pression.

### 2.1.3 Géométrie mixte

On considère maintenant à la fois un forçage par gradient de pression et par parois mobiles (Fig. 2.3). Les équations (Eq. 2.1) étant linéaires, la solution pour la géométrie mixte est

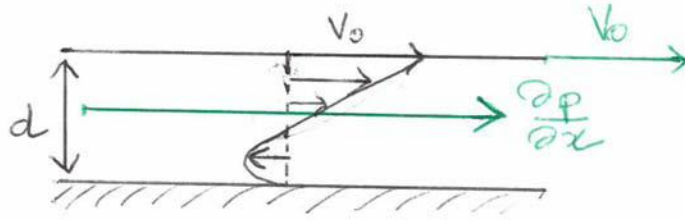


FIGURE 2.3 – Écoulement unidirectionnel en géométrie mixte.

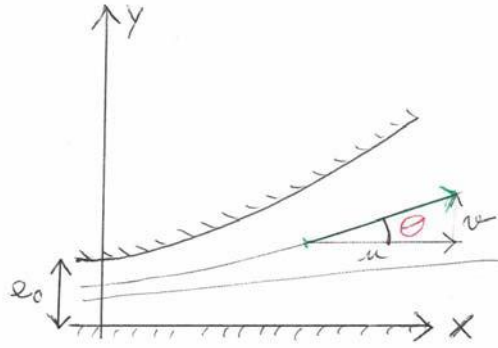


FIGURE 2.4 – Écoulement quasi-parallèle.

simplement la somme des écoulements de Poiseuille et de Couette :

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}y(d-y)\frac{\partial p}{\partial x} + U_0\frac{y}{d}, \quad (2.9)$$

et

$$Q(x) = -\frac{d^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_0d}{2}. \quad (2.10)$$

## 2.2 Écoulements quasi-parallèles, approximation de lubrification

### 2.2.1 Expériences

L'expérience la plus simple mettant en évidence le résultat important de cette approximation, est la feuille de papier glissant sans frottement sur un plan lisse. L'écoulement de lubrification entre la feuille et le plan est responsable de la force de portance qui est bien supérieure à la force de frottement. Cette propriété est utilisée dans les machines tournantes dont les palets hydrauliques sont capables de supporter des charges très lourdes.

### 2.2.2 Approximation de lubrification

On considère un écoulement quasi-parallèle, présentant un léger angle de divergence  $\theta \ll 1$  dans les lignes de courants (Fig. 2.4). On considère que le problème est bidimensionnel avec

l'hypothèse quasi-statique, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.11)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

Soit  $U$  l'ordre de grandeur pour la composante de vitesse  $u \sim U$ . La faible divergence des fonctions de courants permet de donner l'ordre de grandeur pour la composante  $v \sim \theta U$ . L'ordre de grandeur de l'échelle de variation spatiale en  $y$  est notée  $y \sim e_0$ . L'incompressibilité du fluide fournit l'ordre de grandeur de variation spatiale en  $x \sim \frac{e_0}{\theta}$ .

Les deux termes non linéaires de l'Eq. 2.11 sont d'ordre  $\frac{U^2 \theta}{e_0}$  alors que dans le membre de droite les termes linéaires sont d'ordre  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \nu \frac{U \theta^2}{e_0^2}$  et  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \nu \frac{U}{e_0^2}$ . Le premier en  $\theta^2 \ll 1$  sera négligeable devant le second, de sorte que les termes non linéaires ne peuvent être négligés dans Eq. 2.11 que si  $\nu \frac{U}{e_0^2} \gg \frac{U^2 \theta}{e_0}$ . En posant  $\text{Re} = \frac{U e_0}{\nu}$  comme nombre de Reynolds, l'hypothèse de lubrification devient :

$$\text{Re} \ll \frac{1}{\theta} \quad (2.13)$$

En appliquant la même analyse à la composante  $v$ , on obtient  $\frac{\partial p}{\rho \partial y} \sim \nu \frac{\theta U}{e_0^2}$ , d'ordre inférieur à l'ordre de résolution de l'équation en  $u$  (d'ordre  $\nu \frac{U}{e_0^2}$ ) qui sera donc négligeable et à l'ordre de l'hypothèse de lubrification, on a :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (2.14)$$

Finalement, le système d'équations linéaires suivant est obtenu dans l'hypothèse de lubrification (2.13) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

auquel on a ajouté la troisième composante, signifiant simplement que l'écoulement est localement quasi-unidirectionnel dans le plan  $(xOz)$ .

### 2.2.3 Equation de Reynolds

On s'intéresse à un écoulement produit par la combinaison d'un mouvement appliqué à la paroi supérieure de la figure. 2.4 et d'un gradient de pression. On considère que c'est un écoulement quasi-unidirectionnel dans le plan  $(xOz)$  vérifiant l'hypothèse de lubrification et le système linéaire ci-dessus. C'est typiquement le cas d'une feuille qui glisse sur une plan lisse. On appelle  $h(x, z, t)$  la hauteur locale entre les deux parois. La variation temporelle de cette

hauteur, dépend bien sûr de la composante verticale de la vitesse de la paroi supérieure, mais aussi de la forme de la paroi supérieure :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \vec{U} \cdot \vec{e}_y + \vec{\nabla} h \cdot \vec{U}. \quad (2.16)$$

On définit le débit vectoriel dans l'épaisseur  $\vec{Q}(x, z) = Q_x \vec{e}_x + Q_z \vec{e}_z$ . Chaque composante de ce débit a la même définition que Eq. 2.3 et prend l'expression Eq. 2.10 avec  $d = h$  et en échangeant  $x$  et  $z$  suivant la composante du débit :

$$Q_i = -\frac{h^3}{12\mu} \partial_i p + \frac{U_i h}{2}, \quad (2.17)$$

où  $i = x, z$ . L'équation de Reynolds s'obtient à partir de la variation de masse dans le volume  $\iint_{\Sigma} h(x, z, t) dx dz$  qui résulte du bilan des débits entrant et sortant dans ce volume, ce qui s'écrit localement pour le fluide incompressible :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} = -\partial_i Q_i. \quad (2.18)$$

Il suffit de remplacer par Eq. 2.17 pour obtenir différentes expressions de l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^3}{12\mu} \Delta p + \frac{h^2}{4\mu} \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla} p - \frac{h}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} - \frac{\vec{U}}{2} \cdot \vec{\nabla} h \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \partial_i \left( \frac{h^3}{12\mu} \partial_i p \right) - \frac{1}{2} [h \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} h] \quad (2.20)$$

## Chapitre 3

# Équations de Stokes

### 3.1 Introduction sur les écoulements à petit nombre de Reynolds

Contrairement aux parties précédentes, on regarde maintenant la limite des équations de Navier-Stokes quand  $Re \rightarrow 0$ . Physiquement, cela revient à considérer le cas limite d'une dynamique gouvernée par un transport de la quantité de mouvement par viscosité instantanée. Cette approximation est applicable aux objets microscopiques tels que les bactéries et les suspensions, aux dynamiques lentes comme les matériaux géologiques, les écoulements de fluides très visqueux : goudrons, miels, pétroles lourds...

### 3.2 Différentes formes des équations

On se place sous l'hypothèse quasi-statique pour laquelle le système réagit à des modifications de conditions aux limites comme s'il était une succession d'états stationnaires (i.e. absence totale d'inertie).

Sans forces extérieures, l'équation de Stokes s'écrit :

$$\vec{\nabla} p = \mu \Delta \vec{v}. \quad (3.1)$$

Il en existe de nombreuses formes équivalentes dont certaines sont déclinées ci-dessous. En revenant sur l'expression locale de la *RFD*, on a  $\rho \frac{dv_i}{dt} = 0$ , soit que :

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad (3.2)$$

À partir de la vorticité, en utilisant la relation vectorielle<sup>1</sup> pour un fluide incompressible  $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} = -\Delta \vec{v}$ , on obtient une autre forme de l'équation de Stokes :

$$\vec{\nabla} p = -\mu \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}. \quad (3.3)$$

On remarque que la divergence de Eq. 3.3 donne  $\Delta p = 0$ , soit que la pression est solution de l'équation de Laplace. Finalement en prenant le rotationnel de Eq. 3.3 on obtient une autre forme :

$$\Delta \vec{\omega} = \vec{0}. \quad (3.4)$$

---

1.  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

### 3.3 Propriétés des équations

#### 3.3.1 Unicité

On considère l'écoulement dans un volume  $\Omega$  borné par une surface  $\Sigma$  sur laquelle la pression  $p$  et la vitesse  $v_i$  sont connues. On se pose la question suivante : deux champs  $(v_i, p)$  et  $(v'_i, p')$  qui vérifient les mêmes conditions aux limites sont-ils identiques ?

Pour cela on va évaluer l'intégrale :

$$\iiint_{\Omega} (\partial_j v_i - \partial_j v'_i)^2 dV = \iiint_{\Omega} \partial_j [(v_i - v'_i)(\partial_j v_i - \partial_j v'_i)] dV - \iiint_{\Omega} (v_i - v'_i)(\partial_j \partial_j v_i - \partial_j \partial_j v'_i) dV. \quad (3.5)$$

On transforme le premier terme du membre de droite en une intégrale de surface sur  $\Sigma$  :

$$\iiint_{\Omega} \partial_j [(v_i - v'_i)(\partial_j v_i - \partial_j v'_i)] dV = \iint_{\Sigma} (v_i - v'_i)(\partial_j v_i - \partial_j v'_i) n_j dS = 0, \quad (3.6)$$

L'égalité des conditions aux limites sur  $\Sigma$  des deux champs rend cette intégrale nulle. On utilise l'équation de Stokes pour réécrire le second terme du membre de droite qui devient :

$$-\frac{1}{\mu} \iiint_{\Omega} (v_i - v'_i)(\partial_i p - \partial_i p') dV = -\frac{1}{\mu} \left\{ \iiint_{\Omega} \partial_i [(v_i - v'_i)(p - p')] dV - \iiint_{\Omega} (\partial_i v_i - \partial_i v'_i)(p - p') dV \right\} \quad (3.7)$$

Le premier terme de droite se transforme en une intégrale de surface qui est nulle à cause de l'égalité des pressions sur celle-ci, le second terme est nul à cause de l'incompressibilité. On obtient donc que dans le volume  $\Omega$ , les gradients des deux champs sont égaux,  $\partial_j v_i = \partial_j v'_i$  qui, après intégration donne  $v_i = v'_i + A_i$ . Les constantes d'intégration sont nulles par suite de l'égalité des conditions aux limites des deux champs sur la surface  $\Sigma$ .

En conclusion, si on trouve un champ de vitesse solution d'un problème aux conditions aux limites données, alors ce champ est l'unique solution.

#### 3.3.2 Réversibilité

L'équation de Stokes dispose de la propriété de réversibilité temporelle, en effet par changement  $t' = -t$ , soit  $\vec{v}' = -\vec{v}$ , alors  $\vec{v}'$  est aussi solution si on change le sens du gradient de pression  $\vec{\nabla} p' = -\vec{\nabla} p$  et bien sûr le sens des vitesses aux conditions aux limites comme illustré en Fig. 3.1.

En conséquence, l'écoulement sera symétrique autour d'un corps symétrique (Fig. 3.2). Il suffit de se représenter la Fig. 3.1 avec un corps symétrique, a) et b) doivent alors être le même écoulement avec la symétrie  $x \rightarrow -x$  car ils ont tous les deux les mêmes conditions aux limites, sur le corps et à l'infini.

#### 3.3.3 Invariance des lignes de courant et additivité

Si  $\vec{v}$  est solution alors  $\lambda \vec{v}$  l'est aussi, si les forces extérieures et la vitesse à l'infini sont aussi multipliées par  $\lambda$ . D'ailleurs,  $\lambda = -1$  correspond au cas réversible. Quel que soit  $\lambda$ , mais tant que  $\text{Re} \ll 1$ , le profil des lignes de courants reste unique, i.e. : la fonction de courant est simplement multipliée par  $\lambda$ .

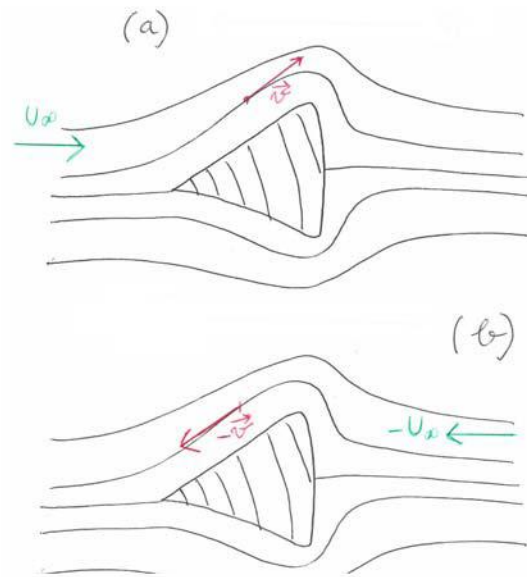


FIGURE 3.1 – Réversibilité : les deux écoulements (a) et (b) sont solutions des équations de Stokes. Les lignes de courant sont identiques dans les deux cas et à elles seules, ne donnent donc aucune information sur le sens de l'écoulement.

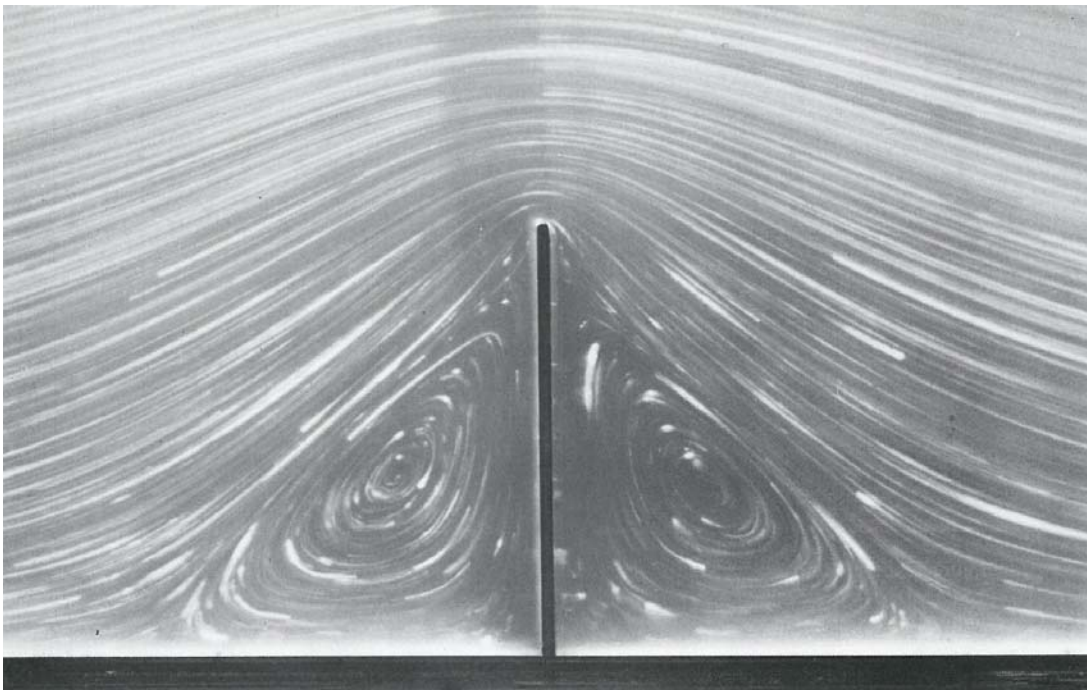


FIGURE 3.2 – Géométrie symétrique = écoulement symétrique, on ne peut pas savoir si l'écoulement provient de la gauche ou de la droite.



Si  $\vec{v}_i$  est solution pour  $\vec{\nabla} p_i$  et la condition aux limites  $\vec{U}_i$ , alors  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$  est solution avec  $\vec{\nabla} p = \lambda_1 \vec{\nabla} p_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} p_2$  et  $\vec{U} = \lambda_1 \vec{U}_1 + \lambda_2 \vec{U}_2$ . Cette propriété a été utilisée en approximation de lubrification pour permettre de décomposer localement le profil de vitesse en un profil de Poiseuille et un profil de Couette.

### 3.3.4 Minimum de dissipation

Pour des conditions aux limites données sur les parois et à l'infini, **l'écoulement incompressible newtonien  $\vec{v}, p$  vérifiant l'équation de Stokes a un taux de dissipation d'énergie  $\epsilon = 2\mu e_{ij} e_{ij}$  minimal.** Soit le champ incompressible et newtonien  $\vec{v}', p'$  ne vérifiant pas l'équation de Stokes. La puissance qu'il dissipe sous forme de chaleur dans tout le volume  $\Omega$  délimité par les conditions aux limites peut s'écrire en fonction de la puissance dissipée par l'écoulement de Stokes :

$$P'_D = 2\mu \iiint_{\Omega} e'_{ij}{}^2 dV = P_D^{Stokes} + 2\mu \iiint_{\Omega} (e'_{ij} - e_{ij})^2 dV + 4\mu I \quad (3.8)$$

où il faut estimer  $I = \iiint_{\Omega} (e'_{ij} - e_{ij}) e_{ij} dV$ . Pour cela on réécrit :

$$\begin{aligned} (e'_{ij} - e_{ij}) e_{ij} &= \frac{1}{4} (\partial_j v'_i + \partial_i v'_j - \partial_j v_i - \partial_i v_j) (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \\ &= \frac{1}{4} [(\partial_j v'_i - \partial_j v_i) \partial_j v_i + (\partial_i v'_j - \partial_i v_j) \partial_i v_j + (\partial_j v'_i - \partial_j v_i) \partial_i v_j + (\partial_i v'_j - \partial_i v_j) \partial_j v_i], \end{aligned} \quad (3.9)$$

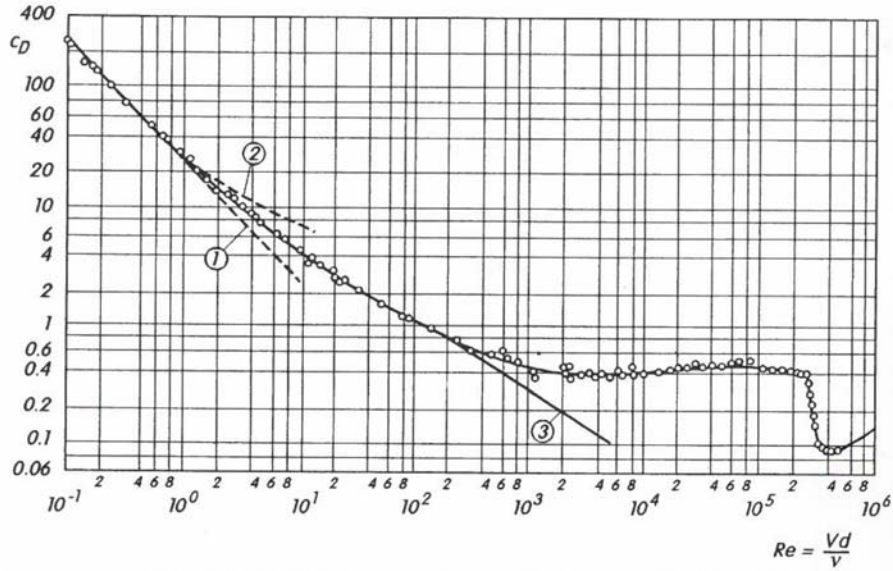
où l'on remarquera que dans le membre de droite, le premier et le second terme sont égaux ainsi que le troisième et le quatrième à cause de la sommation liée à la répétition d'indices.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} [I_1 + I_2], \\ I_1 &= \partial_j (v'_i - v_i) \partial_j v_i \\ I_2 &= \partial_j (v'_i - v_i) \partial_i v_j, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{\Omega} \partial_j [(v'_i - v_i) \partial_j v_i] dV - \iiint_{\Omega} (v'_i - v_i) \partial_j \partial_j v_i dV \\ &= 0 - \frac{1}{\mu} \iiint_{\Omega} (v'_i - v_i) \partial_i p dV, \\ &= 0 - \frac{1}{\mu} \{ \iiint_{\Omega} \partial_i [(v'_i - v_i) p] dV - \iiint_{\Omega} \partial_i (v'_i - v_i) p dV \}, \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'intégrale des divergences sur le volume  $\Omega$  se ramène à une intégrale des conditions aux limites à la surface du volume qui, étant égales pour les deux champs, donne zéro. Avec la condition d'incompressibilité,  $I_1 = 0$ . Avec un calcul semblable, on montre que  $I_2 = 0$  aussi, de sorte que :

$$P'_D = P_D^{Stokes} + \alpha^2 \quad (3.12)$$



Dependence of the drag coefficient of spheres on the Reynolds number  
 Curve 1: theory, after G.G. Stokes (1856),  $c_D = 24/Re$   
 Curve 2: theory, after C.W. Oseen (1911),  $c_D = 24/Re[1 + 3Re/16]$   
 For the extension of this theory for higher Reynolds numbers,  
 cf. M. Van Dyke (1964b)  
 Curve 3: numerical results, after B. Fornberg (1988)  
 Onset of unsteady flow at  $Re = 200$ , cf. U. Dallmann et al. (1993)

FIGURE 3.3 –

Dans le cas d'une sphère tirée à vitesse constante dans un fluide au repos, la puissance dissipée par le fluide est égale à la puissance à fournir pour effectuer le mouvement. La puissance dissipée minimum d'un écoulement de Stokes correspond donc à un coefficient de traînée minimum. La comparaison entre mesures et théories du coefficient de traînée de la sphère en Fig. 3.3 illustre bien cette propriété : les solutions de Navier-Stokes dissipent plus que la solution de Stokes.

### 3.3.5 Prédiction dimensionnelles et efforts fluides

Pour un écoulement disposant d'une vitesse caractéristique  $U$  et d'une taille caractéristique  $L$ , le champ de vitesse solution des équations de Navier Stokes sera de la forme  $\vec{v} = U\vec{G}_{NS}(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, Re)$ , alors que dans le cas de Stokes, la dépendance en Reynolds disparaît :

$$\vec{v} = U\vec{G}_S(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}). \quad (3.13)$$

La contrainte visqueuse dans un écoulement de Stokes sera de la forme  $\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} = \frac{\mu U}{L}G_{ij}(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L})$ , et la contribution visqueuse à la force fluide exercée sur un corps de surface  $\Sigma$  aura la forme :

$$F_i^\mu = \iint_{\Sigma} \sigma'_{ij} n_j dS = \mu U L A_i(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}) \quad (3.14)$$

Pour la pression, l'équation de Stokes nous permet d'avoir  $p = \frac{\mu U}{L} G_p(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L})$ , et la contribution en pression à la force exercée sur le corps :

$$F_i^p = \iint_{\Sigma} p n_i dS = \mu U L B_i(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}). \quad (3.15)$$

La force totale sera donc de la forme :

$$\vec{F} = \vec{F}^\mu + \vec{F}^p = \mu U L \vec{C}(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}). \quad (3.16)$$

Pour un corps animé d'une vitesse  $\vec{U}$  dans un fluide au repos, la force fluide ne sera pas forcément opposée à  $\vec{U}$ . Le coefficient de traînée  $C_D = \frac{\vec{F} \cdot \vec{U}}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$  aura la forme  $C_D \sim \frac{UL}{\nu} = \frac{1}{Re}$ .

Si on considère un corps solide indéformable en mouvement quelconque, alors la vitesse  $\vec{v}$  en chaque point de sa surface pourra toujours être décomposée à chaque instant en :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{U} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (3.17)$$

où  $\vec{U}$  et  $\vec{\Omega}$  sont respectivement la vitesse de translation et de rotation du solide. A chaque instant, un couple  $\vec{\Gamma}$  et une force  $\vec{F}$  vont agir sur le solide. La linéarité des équations de Stokes implique qu'ils sont reliés au mouvement du solide par les relations linéaires :

$$F_i = -\mu(A_{ij}U_j + B_{ij}\Omega_j) \quad (3.18)$$

$$\Gamma_i = -\mu(C_{ij}U_j + D_{ij}\Omega_j) \quad (3.19)$$

avec les propriétés suivantes :  $A_{ij} = A_{ji}$ ,  $D_{ij} = D_{ji}$  et  $B_{ij} = C_{ji}$  qui sont des conséquences de  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Pour un corps avec au moins 3 plans de symétrie perpendiculaires (cylindre, sphère, parallélépipède ...), dont chaque plan est défini par un vecteur normal  $\vec{x}_i$ , alors dans la base de ces vecteurs,  $A_{ij}$  et  $D_{ij}$  sont des matrices diagonales et  $C_{ij} = B_{ij} = 0$ . Pour un cube, ayant 3 plans de symétrie identiques, les termes diagonaux sont identiques. Dans ce cas, à vitesses de translation et de rotation données, ni la force ni le couple ne dépend de l'orientation du cube.

# Chapitre 4

## Solutions singulières

### 4.1 Solution générale des équations de Stokes

Le problème à résoudre est :

$$-\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \vec{f}_{ext} = \vec{0}, \quad (4.1)$$

avec  $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ , où  $\vec{f}_{ext}$  est une force de volume. Après quelques manipulations comme en section (3.2), on montre que  $\mu\Delta^2\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{f}_{ext}$ . En l'absence de force de volume, le système 4.1 équivaut à résoudre d'une part une équation de Laplace pour la pression ( $\Delta p = 0$ , déjà vu en section 3.2) dont les solutions sont les fonctions harmoniques et d'autre part une équation biharmonique pour la vitesse ( $\Delta^2\vec{v} = \vec{0}$ ) dont les solutions sont les fonctions biharmoniques. Le problème (4.1) est donc résolu sur le plan mathématique, et une solution générale proposée par Oberbeck 1876 s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2\vec{\Phi} - \vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{\Phi}) + \vec{\nabla}\Phi_c \\ p &= -2\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

dont les 3 composantes du vecteur  $\vec{\Phi}$  et la fonction scalaire  $\Phi_c$  sont les fonctions harmoniques bien connues (i.e. solutions de  $\Delta\vec{\Phi} = \vec{0}$  et  $\Delta\Phi_c = 0$ ). En allant chercher dans le catalogue de ces fonctions, on peut construire aisément des solutions pour toutes situations physiques de Stokes (i.e. ayant des conditions aux limites données). En pratique, nous n'en étudierons que deux, le *Stokeslet* et le *Dipôle* dont nous pourrons calculer les écoulements autour de corps simples, tels que le cylindre et la sphère.

### 4.2 Stokeslet

Le solution est donnée par les fonctions harmoniques  $\vec{\Phi} = \frac{\vec{\alpha}}{r}$  et  $\Phi_c = 0$ , où  $\alpha$  est un vecteur arbitraire constant. En remplaçant dans (4.2), on obtient <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{\alpha}}{r} + \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}{r^3}\vec{r} \\ p &= 2\mu\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}{r^3} = -2\mu\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

---

1. Il est recommandé d'adopter la notation tensorielle et de remarquer que  $\partial_i x_j = \delta_{ij}$  ainsi que  $\partial_i(\frac{1}{r}) = -\frac{x_i}{r^3}$ .

Pour la suite on orientera toujours le vecteur  $\vec{\alpha}$  dans la direction  $x$ , avec  $\vec{\alpha} = \alpha \vec{e}_x$ .

Le *Sens physique du Stokeslet* se comprend en considérant une force singulière dans le volume<sup>2</sup> :  $\vec{f}_{ext} = f_x \delta(\vec{r}) \vec{e}_x$ , pour laquelle la pression est solution de  $\Delta p = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_{ext}$ , soit que

$$\Delta p = f_x \frac{\partial \delta(\vec{r})}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Il est nécessaire de faire un rappel sur la solution de  $\Delta \Phi = \delta(\vec{r})$  qui est  $\Phi = -\frac{1}{4\pi r}$  (communément appelée point source). En dérivant cette équation par rapport à  $x$ , on obtient  $\Delta(f_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}) = f_x \frac{\partial \delta(\vec{r})}{\partial x}$ . Le terme source est identique à celui de (4.4). Ainsi la pression provoquée par la force singulière est  $p = f_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ , soit que  $p = -\frac{f_x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r})$  où nous avons remplacé  $\Phi$  par son expression. C'est en fait la même pression que le Stokeslet (4.3) avec  $\vec{\alpha} = \frac{f_x}{8\pi\mu} \vec{e}_x$ .

En conclusion, l'écoulement du Stokeslet doit être vu comme celui provoqué par une force singulière  $\vec{f}_{ext} = f_x \delta(\vec{r}) \vec{e}_x$  et vice-versa. On retiendra donc qu'avec cette force, le champ solution du Stokeslet s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{f_x}{8\pi\mu} \left( \frac{x^2 + r^2}{r^3}, \frac{xy}{r^3}, \frac{xz}{r^3} \right) \\ p &= \frac{f_x}{4\pi} \frac{x}{r^3} = -\frac{f_x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

En coordonnées sphériques,  $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta + v_r \vec{e}_r + v_\phi \vec{e}_\phi$  avec ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $z = r \sin \theta \sin \phi$ ), où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur  $\vec{r}$  et l'axe  $\vec{e}_x$  (voir schéma 4.1), le Stokeslet prend l'expression :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{f_x}{8\pi\mu} \frac{2 \cos \theta}{r} \\ v_\theta &= -\frac{f_x}{8\pi\mu} \frac{\sin \theta}{r}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le champ de vitesse est axisymétrique, il est représenté en figure 4.2(a)

### 4.3 Dipôle

Cette fois-ci on regarde la solution (4.2) telle que  $\Phi_c = G \frac{x}{4\pi r^3}$  et  $\vec{\Phi} = \vec{0}$ . Le Dipôle s'obtient aussi par différenciation de la solution du Stokeslet, et s'interprète donc comme deux forces égales en intensité mais opposées en  $\vec{r} = \vec{0}$ . En conséquence, il n'y a pas de force extérieure associée au Dipôle et le champ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{G}{4\pi} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, -\frac{3xy}{r^5}, -\frac{3xz}{r^5} \right) \\ p &= \text{const.} \end{aligned} \quad (4.7)$$

---

2.  $f_x$  ne dépend pas de l'espace, c'est l'intensité de la force singulière en  $\vec{r} = \vec{0}$ .

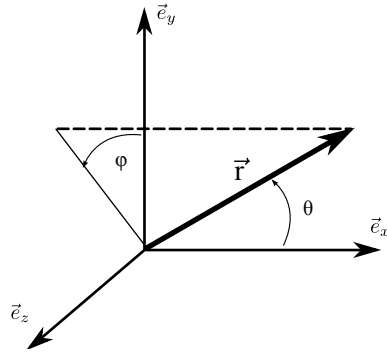


FIGURE 4.1 – Définition du système de coordonnées sphériques.

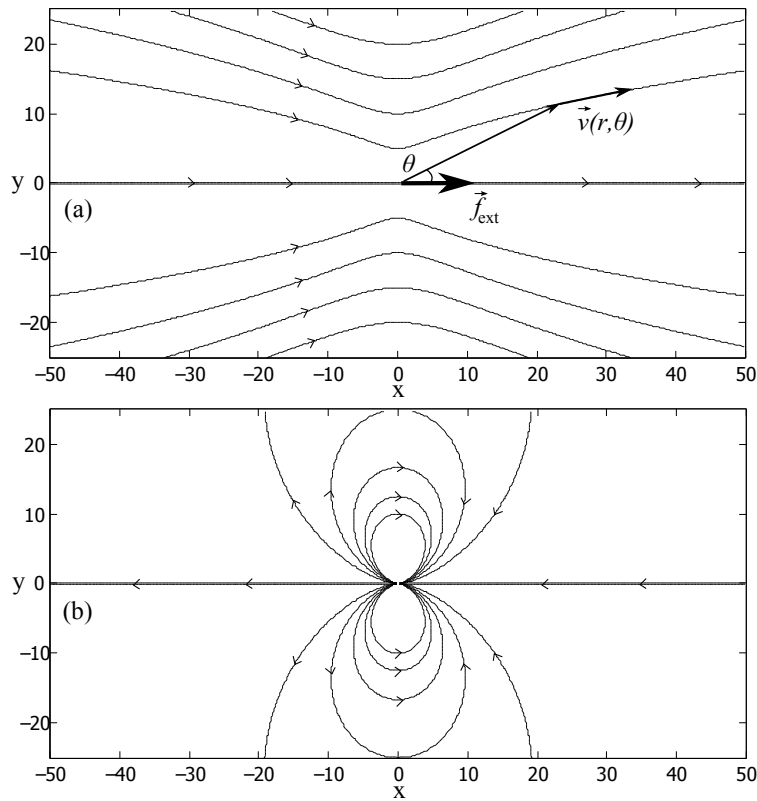


FIGURE 4.2 – Représentation du champ de vitesse d'un Stokeslet (a) associé à sa force volumique singulière  $\vec{f}_{ext} = f_x \delta(\vec{r}) \vec{e}_x$  et d'un Dipôle (b) pour lequel il n'y a aucune force volumique.

En coordonnées sphériques, son expression est :

$$\begin{aligned}v_r &= -\frac{G}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\v_\theta &= -\frac{G}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Son champ est représenté dans le figure 4.2(b).

## 4.4 Méthode des singularités

La méthode des singularités consiste à trouver la bonne combinaison linéaire de solutions singulières qui satisfait aux conditions aux limites du problème physique posé. Avec la propriété d'unicité de la solution, la combinaison donnera la solution unique au problème. Nous verrons dans le prochain chapitre que l'écoulement autour d'une sphère en mouvement uniforme est la somme d'un Stokeslet et d'un Dipôle, qu'un cylindre en mouvement uniforme est une somme linéique de Stokeslets et de Dipôles s'il se déplace perpendiculairement à son axe, et une somme linéique de Stokeslets uniquement s'il se déplace parallèlement à son axe. Une fois la combinaison connue, on accède directement à la force exercée par le corps sur le fluide à partir de la contribution des Stokeslets.

## Chapitre 5

# Écoulements de Stokes autour de corps simples

### 5.1 Sphère

#### 5.1.1 Champ de vitesse

Pour trouver l'écoulement  $\vec{v}(r, \theta)$  produit par une sphère de rayon  $R$  en mouvement uniforme  $U\vec{e}_x$  dans un fluide au repos, nous devons réaliser les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{v}(R, \theta) &= U\vec{e}_x \\ \vec{v}(r \rightarrow +\infty, \theta) &= \vec{0}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Prenons un Stokeslet :

$$\vec{v}_S = \frac{f_x}{8\pi\mu r}(2 \cos \theta, -\sin \theta),\tag{5.2}$$

et un Dipôle :

$$\vec{v}_D = -\frac{G}{4\pi r^3}(2 \cos \theta, \sin \theta),\tag{5.3}$$

alors  $\vec{v}(r, \theta) = \vec{v}_S + \vec{v}_D$  est aussi une solution de Stokes. On montre facilement que la vitesse en  $\vec{r} = R\vec{e}_r$  de cette solution  $\vec{v}(R, \theta)$  peut être égale à  $U\vec{e}_x$  à condition que  $G = \frac{f_x R^2}{6\mu}$  et  $f_x = 6\pi\mu R U$ . Dans ce cas, les conditions aux limites (5.1) sont satisfaites, et l'écoulement autour de la sphère est donné par :

$$\begin{aligned}v_r &= U \cos \theta \left( \frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta &= -U \sin \theta \left( \frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right)\end{aligned}\tag{5.4}$$

$f_x$  est la seule force exercée sur le fluide pour le mettre en mouvement. Donc  $F = -f_x$  est la force exercée par le fluide sur la sphère, et la célèbre formule de Stokes pour la résistance à l'avancement d'une sphère de vitesse uniforme  $U$  est :

$$F = -6\pi\mu R U.\tag{5.5}$$



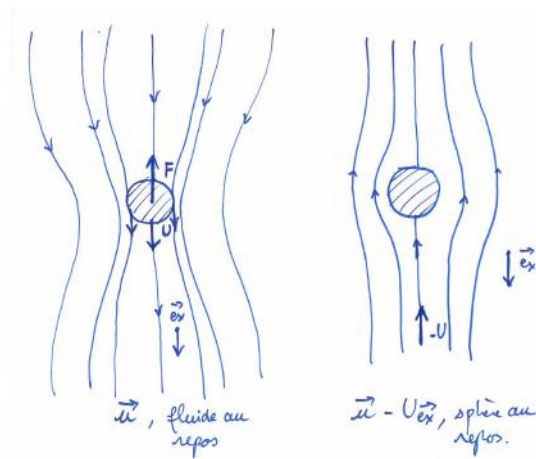


FIGURE 5.1 – Écoulement de Stokes autour de la sphère dans le référentiel du fluide au repos (a) et de la sphère au repos (b).

L'écoulement autour de la sphère est représenté dans la figure 5.1 pour les deux référentiels suivant que le fluide ou la sphère est au repos.

### 5.1.2 Champ de pression

La pression est donnée par la solution du Stokeslet puisque le Dipôle n'a pas de contribution :

$$p = \frac{3}{2}\mu RU \frac{\cos \theta}{r^2} + p_0 \quad (5.6)$$

### 5.1.3 Coefficient de traînée

Suivant sa définition,  $C_D = \frac{\vec{F} \cdot \vec{U}}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$ , avec le maître couple  $S = \pi R^2$  et diamètre  $d = 2R$  de la sphère, on trouve à partir de la formule de Stokes (5.5) :

$$C_D = \frac{24}{Re}, \quad (5.7)$$

où  $Re = \frac{Ud}{\nu}$ . Cette loi théorique qui découle de l'équation de Stokes est montrée sur la figure 3.3. Cependant, elle n'est pas entièrement satisfaisante, car une étude du champ de vitesse plus approfondie à l'infini montre une singularité présentée dans la partie suivante.

### 5.1.4 Paradoxe de Stokes, approximation d'Oseen

Examinons la solution loin de la sphère,  $r \gg R$ . Puisque le Dipôle décroît bien plus vite, c'est la contribution du Stokeslet qui domine :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{3R}{2r} U \cos \theta \\ v_\theta &= -\frac{3R}{4r} U \sin \theta \end{aligned} \quad (5.8)$$

Un simple calcul de l'énergie cinétique du fluide mis en mouvement loin de la sphère  $E_c = \int_{L \gg R}^{+\infty} e_c 4\pi r^2 dr$  avec  $e_c = \frac{1}{2}\rho(u_\theta^2 + u_r^2) \sim \frac{1}{r^2}$  montre qu'elle diverge ce qui est en contradiction avec une puissance injectée finie dans un écoulement stationnaire. La solution n'est donc pas "complètement" physique : c'est le paradoxe de Stokes.

Pour en comprendre l'origine, plaçons nous dans le référentiel où la sphère est au repos  $\vec{v} = (\vec{v}_s - U\vec{e}_x)$  avec  $\vec{v}_s$  donnée par (5.8). Il faut se poser la question de la validité de l'approximation de Stokes qui consistait à négliger le terme convectif. Sur l'axe de la sphère et pour des distances  $L \gg R$ , on a l'ordre de grandeur du terme convectif :

$$|\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}| \sim (v_{sx} - U) \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} \sim U \frac{1}{L} \frac{RU}{L} = \frac{RU^2}{L^2}, \quad (5.9)$$

et celui du terme diffusif :

$$|\nu \Delta \vec{v}| \sim \nu \frac{RU}{L^3}. \quad (5.10)$$

Le rapport des deux termes  $\frac{|\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}|}{|\nu \Delta \vec{v}|} \sim \frac{L}{R} \text{Re}$ , où le nombre de Reynolds de la sphère est  $\text{Re} = \frac{UR}{\nu}$ . Ainsi pour un nombre de Reynolds fixé, aussi petit soit-il, il existera toujours une distance  $L$  telle que  $\frac{|\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}|}{|\nu \Delta \vec{v}|} > 1$ , soit :

$$L > \frac{R}{\text{Re}}. \quad (5.11)$$

Au delà de  $\frac{R}{\text{Re}}$  la solution ne peut plus être décrite par l'équation de Stokes. L'approximation d'Oseen consiste à résoudre :

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} p = \mu \Delta \vec{v}. \quad (5.12)$$

pour  $r \rightarrow \infty$ , c'est le problème extérieur et de résoudre l'équation de Stokes pour  $r \rightarrow R$ , c'est le problème intérieur. Les deux solutions, extérieure et intérieure se raccordent avec la théorie des raccordements asymptotiques qui fait apparaître la taille caractéristique  $\frac{R}{\text{Re}}$  du raccordement.

Pour l'écoulement de la sphère, la régularisation n'apporte pas grand-chose sur le coefficient de traînée comme en témoigne la solution (2) de la figure 3.3. Par contre, pour un cylindre infini, ou de manière équivalente l'écoulement bidimensionnel autour d'un cercle, il n'existe pas de solution pour les équations de Stokes. Dans ce cas, seule l'approximation d'Oseen permet le calcul théorique de l'écoulement et de son coefficient de traînée.

## 5.2 Force exercée sur un cylindre de longueur finie

On considère un cylindre de longueur finie  $b + c$  et de rayon  $a \ll b, c$ . Il est animé d'une vitesse constante  $U\vec{e}_x$ . On cherche donc la solution de Stokes  $\vec{v}(\vec{r})$  qui satisfait aux conditions aux limites  $\vec{v} = U\vec{e}_x$  sur le cylindre et  $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$  loin du cylindre.

Nous traiterons les deux cas d'un mouvement perpendiculaire ou parallèle à l'axe du cylindre. Le calcul analytique ne donnera pas accès au champ de vitesse complet autour du cylindre, par contre la contribution de chaque Stokeslet fournira la force nécessaire pour effectuer le mouvement ainsi que la force de résistance en fonction de la vitesse du corps.

### 5.2.1 Cylindre perpendiculaire à la direction du mouvement

On place sur l'axe du cylindre une distribution continue linéaire  $\vec{s}$  de Stokeslets  $d\vec{v}_s$  ayant une densité<sup>1</sup> d'intensité de force  $f_x$ .

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \int_{Z=-b}^{Z=c} d\vec{v}_s(x, y, z - Z) \\ \vec{s} &= \int_{Z=-b}^{Z=c} \frac{f_x dZ}{8\pi\mu} \left[ \frac{x^2 + r^2}{r^3}, \frac{xy}{r^3}, \frac{x(z - Z)}{r^3} \right]\end{aligned}\quad (5.13)$$

Nous évaluerons cette intégrale dans le plan  $z = 0$  et sur la surface du cylindre, soit sur le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 = a^2$ . Ainsi  $r^2 = x^2 + y^2 + (z - Z)^2 = a^2 + Z^2$ . On pourra jouer sur les valeurs  $b$  et  $c$  pour s'écartier du centre du cylindre mais toujours en restant loin de ses bords puisque  $a \ll b, c$  :

$$\vec{s}_{\mathcal{C}} = \int_{Z=-b}^{Z=c} \frac{f_x dZ}{8\pi\mu} \left[ \frac{x^2 + a^2 + Z^2}{(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{xy}{(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-xZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (5.14)$$

Il y a 3 intégrales à évaluer :

$$\begin{aligned}\int_{-b}^c \frac{dZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{c}{a}} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\sim \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{a^2}\end{aligned}\quad (5.15)$$

$$\int_{-b}^c \frac{dZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{c}{a}} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}} = [\operatorname{argsh}(\eta)]_{-\frac{b}{a}}^{\frac{c}{a}} \sim \ln\left(\frac{4cb}{a^2}\right) \quad (5.16)$$

$$\int_{-b}^c \frac{Z dZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{c}{a}} \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (5.17)$$

Pour l'évaluation (5.16), on a utilisé  $\operatorname{argsh}(\eta) = \ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) \sim \ln(2\eta)$  quand  $\eta \gg 1$ . En remplaçant dans (5.14), on obtient :

$$\vec{s}_{\mathcal{C}} = \frac{f_x}{8\pi\mu} \left[ \ln\left(\frac{4cb}{a^2}\right) + \frac{2x^2}{a^2}, \frac{2xy}{a^2}, 0 \right] \quad (5.18)$$

Cette expression ne traduit pas encore la condition aux limites sur le cylindre, car la vitesse n'y est pas constante. Nous allons donc maintenant calculer la vitesse sur la surface du cylindre  $\vec{d}_{\mathcal{C}}$  produite par une distribution continue de dipôles exactement de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \int_{Z=-b}^{Z=c} d\vec{v}_d \\ \vec{d} &= \int_{Z=-b}^{Z=c} \frac{G dZ}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \frac{-3xy}{r^5}, \frac{-3x(z - Z)}{r^5} \right],\end{aligned}\quad (5.19)$$

1. la force d'un Stokeslet d'élément de longueur  $dZ$  est  $f_x dZ \vec{e}_x$

FIGURE 5.2 – Distributions de solutions singulières pour un cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $b + c$  en mouvement à la vitesse  $U\vec{e}_x$  perpendiculaire à son axe (a) ou suivant son axe (b).

et

$$\vec{d}_C = \int_{Z=-b}^{Z=c} \frac{GdZ}{4\pi} \left[ \frac{1}{(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(a^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{-3xy}{(a^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{3xZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}} \right],$$

avec 2 nouvelles intégrales à évaluer par rapport au calcul précédent :

$$\begin{aligned} \int_{-b}^c \frac{dZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}} &= \frac{1}{a^4} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{c}{a}} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &\sim \frac{1}{a^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^4} \left[ \frac{\eta(2\eta^2 + 3)}{3(1 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4}{3a^4} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\int_{-b}^c \frac{ZdZ}{(a^2 + Z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^3} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{c}{a}} \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{1}{a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \quad (5.21)$$

$$\vec{d}_C = \frac{G}{4\pi} \left[ \frac{2}{a^2} - \frac{4x^2}{a^4}, \frac{-4xy}{a^4}, 0 \right]. \quad (5.22)$$

Maintenant, on peut réaliser la bonne condition aux limites en additionnant les distributions linéaires des Stokeslets (5.18) et des Dipôles (5.22), soit  $\vec{v}_C = \vec{s}_C + \vec{d}_C = U_\perp \vec{e}_x$  si  $G = \frac{f_x}{4\mu} a^2$ , ce qui donne :

$$U_\perp = \frac{f_x}{8\pi\mu} \left[ \ln\left(\frac{4bc}{a^2}\right) + 1 \right] \quad (5.23)$$

Bien que l'on ait la bonne condition aux limites sur le contour  $\mathcal{C}$ , on remarque que la vitesse obtenue dépend de la position sur le cylindre. Cela est plus visible quand on pose  $c = \ell - z$  et  $b = \ell - z$  où  $\ell$  est la demi-longueur du cylindre :  $U_\perp(z) = \frac{f_x}{8\pi\mu} \left[ \ln\left[4\left(\frac{\ell^2 - z^2}{a^2}\right)\right] + 1 \right]$ , la vitesse est maximum au centre puis décroît très lentement (logarithmiquement) en se rapprochant des bords ou le calcul n'est plus valable. La variation est assez faible, de l'ordre de quelques pourcent sur 80% de la longueur du cylindre. On nommera  $f_\perp = f_x$  dans la suite, force volumique par unité de longueur de cylindre associée à la distribution linéaire de Stokeslets :

$$f_\perp = \frac{8\pi\mu}{\ln\left(\frac{4bc}{a^2}\right) + 1} U_\perp = \lambda_\perp U_\perp, \quad (5.24)$$

### 5.2.2 Cylindre parrallèle à la direction du mouvement

Pour rendre compte de cet écoulement, on oriente l'axe du cylindre suivant  $\vec{e}_x$  en gardant la même distribution linéaire de Stokeslets mais cette fois-ci en sommant suivant  $X$  :

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \int_{X=-b}^{X=c} d\vec{v}_s(x - X, y, z) \\ \vec{s} &= \int_{X=-b}^{X=c} \frac{f_x dX}{8\pi\mu} \left[ \frac{(x - X)^2 + r^2}{r^3}, \frac{(x - X)y}{r^3}, \frac{(x - X)z}{r^3} \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

On fait le calcul dans le plan  $x = 0$ , et sur le contour  $\mathcal{C}$  du cylindre d'équation  $y^2 + z^2 = a^2$  de sorte que  $r^2 = X^2 + a^2$ . La vitesse de la distribution de Stokeslets est sur ce contour :

$$\vec{s}_{\mathcal{C}} = \int_{X=-b}^{X=c} \frac{f_x dX}{8\pi\mu} \left[ \frac{2}{(X^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{(X^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-Xy}{(X^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-Xz}{(X^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (5.26)$$

Chacune de ces intégrales ayant déjà été évaluées ci-dessus, on a finalement :

$$\vec{s}_{\mathcal{C}} = \frac{f_x}{8\pi\mu} [2 \ln \frac{4bc}{a^2} - 2, 0, 0] \quad (5.27)$$

On constate que cette distribution est suffisante pour satisfaire la condition aux limites de notre problème, à savoir  $\vec{s}_{\mathcal{C}} = U_{\parallel} \vec{e}_x$  et :

$$U_{\parallel} = \frac{f_x}{8\pi\mu} [2 \ln \frac{4bc}{a^2} - 2], \quad (5.28)$$

où  $f_x$  que l'on nommera  $f_{\parallel}$  dans la suite, est la force volumique par unité de longueur associée à la translation parallèle du cylindre :

$$f_{\parallel} = \frac{8\pi\mu}{2 \ln \frac{4bc}{a^2} - 2} U_{\parallel} = \lambda_{\parallel} U_{\parallel}, \quad (5.29)$$

### 5.2.3 Cylindre en mouvement quelconque

Le cylindre ayant 3 plans de symétrie nous savons que dans la base de ces plans ( $\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_{\perp 1}, \vec{e}_{\perp 2}$ ) où  $\parallel$  et  $\perp$  se rapportent à l'axe du cylindre, la relation entre les composantes de la force et de la vitesse s'exprime par une matrice diagonale (voir PC3) :

$$\begin{aligned} f_{\parallel} &= \lambda_{\parallel} U_{\parallel} \\ f_{\perp 1} &= \lambda_{\perp} U_{\perp 1} \\ f_{\perp 2} &= \lambda_{\perp} U_{\perp 2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Les configurations  $\perp 1$  et  $\perp 2$  étant identiques, c'est le même coefficient  $\lambda_{\perp}$  dans les deux cas. D'après notre calcul précédent et dans la limite  $bc \gg a^2$  on trouve que :

$$\lambda_{\parallel} = \frac{1}{2} \lambda_{\perp} \quad (5.31)$$

Pour un cylindre de longueur donnée, la force de résistance à l'avancement est deux fois plus grande pour un mouvement en translation perpendiculaire à l'axe que pour un mouvement parallèle. Grâce à cette propriété des écoulements à bas nombre de Reynolds, de nombreuses cellules du monde biologique assurent leur mobilité. Nous exposons dans la partie suivante la théorie résistive de la propulsion qui utilise ce résultat.

## Chapitre 6

# Application à la bio-mécanique

### 6.1 Observations sur la mobilité des micro-organismes

Les écoulements autour des cellules sont gouvernés par les équations de Stokes, la propriété de réversibilité les oblige à utiliser des stratégies adéquates pour se déplacer dans le fluide. Nous verrons le cas de la propulsion ondulatoire pour les cellules équipées de flagelles ou les cellules de type "ver" comme le nématode en figure 6.1.

### 6.2 Force fluide locale pour un flagelle et un cil

Les structures flagellaires ou ciliaires sur lesquelles les efforts fluides s'exercent sont considérées localement comme des cylindres de faible diamètre. Pendant leur mouvement de vitesse  $\vec{u}_S$ , la force locale fluide sur la structure présentera trois composantes, l'une alignée avec son axe et les autres perpendiculaires à l'axe. Comme nous venons de le voir dans le chapitre précédent, ces composantes s'expriment simplement à partir des composantes de la vitesse parallèle ou perpendiculaires à l'axe de la structure *lorsque le fluide est au repos*. On se limitera à des mouvements de structures dans un plan uniquement, il n'y a donc qu'une seule composante perpendiculaire :

$$\begin{aligned} f_{\perp} &= -\lambda_{\perp} u_{S\perp} \\ f_{\parallel} &= -\lambda_{\parallel} u_{S\parallel} \end{aligned} \tag{6.1}$$

### 6.3 Théorie résistive de la propulsion ondulatoire

On considère un corps déformable cylindrique de longueur  $L$  et de diamètre  $a \ll L$ . Le corps est animé d'un mouvement ondulatoire dans une direction. Nous allons voir que l'écoulement de Stokes produit une propulsion du corps dans une direction opposée à la propagation de l'onde plane.



FIGURE 6.1 – Nématode se propulsant vers la gauche en réalisant une ondulation de son corps se propageant de la gauche vers la droite.

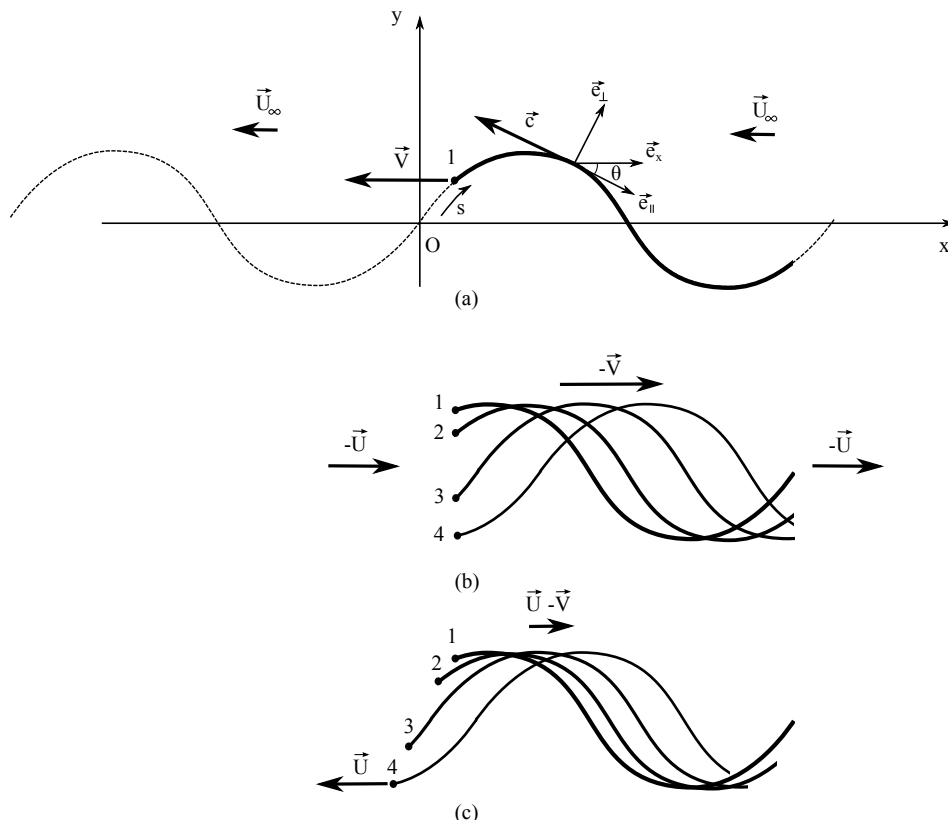


FIGURE 6.2 – Modélisation du mouvement ondulatoire du corps dans les 3 référentiels : (a) ondulation au repos, (b) corps sans vitesse de propulsion, (c) référentiel du fluide au repos. Les instants 1,2,3,4 suivent l'ordre chronologique.

### 6.3.1 Modélisation du mouvement et du flagelle

On appelle  $\vec{U} = -U(t)\vec{e}_x$  la vitesse de propulsion du corps dans la direction  $Ox$  lorsque le fluide est au repos (voir figure 6.2c).

#### 6.3.1.1 Dans le référentiel de l'onde au repos

C'est dans ce référentiel que nous modélisons le mouvement du corps. La forme d'onde est donnée par la courbe pointillée dans la figure 6.2(a), qui reste fixe dans ce référentiel. Le corps suit la courbe pendant le mouvement, avec en chaque point un module de vitesse constant  $c$ . Soit  $s$  l'abscisse curviligne le long de la courbe. A ce stade nous n'avons pas à spécifier la forme de l'onde. De manière générale elle a pour expression  $[X(s), Y(s), Z(s)]$ , avec  $Y = Z = 0$  dans notre cas car la trajectoire est dans le plan. On appelle  $\theta$  l'angle avec l'horizontale, tel que

$$\cos \theta = \frac{dX}{ds} = X'(s)$$

La vitesse  $\vec{V} = -V\vec{e}_x$  de progression du corps projetée sur  $Ox$  se calcule en moyennant la vitesse de chaque élément du corps :

$$V(t) = \frac{1}{L} \int_{-ct}^{-ct+L} c \cos \theta(s) ds \quad (6.2)$$

Il est intéressant de poser  $V = \alpha c$  où  $\alpha(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \cos \theta(s' - ct) ds'$  dépend principalement de l'amplitude l'onde, plus elle est grande et plus  $\alpha$  est petit. Dans ce référentiel, le fluide n'est pas au repos et on note  $\vec{U}_\infty$  sa vitesse. On montre ci-dessous que  $\vec{U}_\infty = \vec{V} - \vec{U}$ .

#### 6.3.1.2 Dans le référentiel où le corps n'a pas de vitesse de propulsion

On se place maintenant dans le repère où la "tête" du corps reste en butée pour une abscisse fixe comme décrit en figure 6.2(b). Cela revient à additionner la vitesse  $-\vec{V}$  au cas précédent pour ainsi bloquer la progression du corps. L'onde se propagera donc vers la droite avec la vitesse  $-\vec{V}$ , et comme dans ce référentiel la vitesse du fluide est  $-\vec{U}$  on a alors  $\vec{U}_\infty - \vec{V} = -\vec{U}$  ce qui fournit la vitesse du fluide  $\vec{U}_\infty$  dans le référentiel de l'onde au repos.

#### 6.3.1.3 Dans le référentiel où le fluide est au repos

On se place maintenant dans le repère du laboratoire où le fluide est au repos (figure 6.2c), ce qui revient à additionner la vitesse  $\vec{U}$  au cas précédent, le corps se déplace bien avec une vitesse de propulsion  $\vec{U}$  et la vitesse de l'onde est  $\vec{U} - \vec{V}$ .

### 6.3.2 Force totale du fluide sur le flagelle

Il s'agit de calculer la vitesse en chaque point du corps dans le référentiel où le fluide est au repos,

$$\vec{u}_S = \vec{c} - \vec{U}_\infty = \vec{c} - (\vec{V} - \vec{U}) \quad (6.3)$$

dans la base locale  $(\vec{e}_\perp, \vec{e}_\parallel)$  où  $\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_\parallel + \sin \theta \vec{e}_\perp$ , soit :

$$\vec{u}_S = [-c + (V - U) \cos \theta] \vec{e}_\parallel + (V - U) \sin \theta \vec{e}_\perp. \quad (6.4)$$



La force locale est donc

$$\vec{f} = -\lambda_{\parallel}[-c + (V - U) \cos \theta] \vec{e}_{\parallel} - \lambda_{\perp}(V - U) \sin \theta \vec{e}_{\perp}, \quad (6.5)$$

qu'il faut projeter suivant  $Ox$  pour la composante propulsive et intégrer sur tous les éléments du corps pour avoir la force propulsive totale :

$$T(t) = \int_{corps} \vec{f} \cdot \vec{e}_x ds = \int_{-ct}^{-ct+L} f_{\parallel} \cos \theta + f_{\perp} \sin \theta ds, \quad (6.6)$$

soit après substitutions :

$$T(t) = -\lambda_{\parallel}L[(V - U)\beta - V] - \lambda_{\perp}L(V - U)(1 - \beta), \quad (6.7)$$

où  $\beta(t) = \frac{1}{L} \int_{-ct}^{-ct+L} \cos^2 \theta ds$  et  $V = \alpha c$ . Il est utile de remarquer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des grandeurs positives inférieures à 1. Avec nos notations, il y a propulsion si  $T < 0$  (force de même sens que la vitesse du corps).

### 6.3.3 Efficacité de propulsion

La force totale doit être instantanément nulle si le corps est libre  $T(t) = 0$ , c'est la conséquence de l'équation 3.2 liée à l'absence totale d'inertie en régime de Stokes. Nous pouvons donc calculer le rapport entre la vitesse de propulsion  $U$  et la vitesse opposée de l'ondulation  $V$  :

$$\frac{U}{V} = \frac{(1 - \beta)(1 - \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}})}{1 - \beta + \beta \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}}} \quad (6.8)$$

On remarque que si  $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel}$ , alors  $U = 0$  et le corps ne se propulse pas. Le calcul pour une dynamique de Stokes nous donnait  $\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = \frac{1}{2}$ . Dans ce cas

$$\frac{U}{V} = \frac{1 - \beta}{2 - \beta}, \quad (6.9)$$

comme  $0 < \beta < 1$ , on a une efficacité maximum obtenue pour  $\beta = 0$  montrant que la vitesse de propulsion est toujours inférieure à la moitié de la vitesse de l'ondulation.

# Chapitre 7

## Conclusion

Ce cours reporte les éléments fondamentaux de dynamique des fluides incompressibles linéaires. Tout d'abord, la théorie de lubrification constitue une brique élémentaire pour le calcul d'écoulements faiblement non parallèles. Ces écoulements sont simplement la superposition locale d'un profil de cisaillement (fonction affine qui n'apporte pas de modification de pression le long de l'écoulement) entièrement déterminé par les conditions aux limites de la vitesse, et d'un écoulement de poiseuille (fonction parabolique qui apporte une modification de la pression le long de l'écoulement avec la loi de perte de charge). La conservation du débit permet alors de connaître l'intensité de l'écoulement de poiseuille qui sera à l'origine des variations de pression et donc de la force de portance pour les paliers hydrauliques ou la feuille glissante sur un plan lisse. Cette théorie est applicable tant que l'angle de divergence des lignes de courant est inférieur à  $1/Re$  : ce n'est pas une théorie de petit nombre de Reynolds.

La théorie de Stokes décrit quant à elle, les mouvements lorsque  $Re \rightarrow 0$ . Il n'y a pas de conditions sur la géométrie contrairement à la théorie de lubrification. Nous nous sommes intéressés au calcul de la traînée pour les corps simples et mis en évidence le paradoxe de la limite de Stokes. De ce fait, la traînée d'un cylindre (géométrie 2D) n'a pas de solution. L'explication repose sur le passage à  $Re \rightarrow 0$  des équations de Navier-Stokes qui est trop brusque en éliminant tous termes convectifs et fait naître des singularités (de manière équivalente au passage à  $Re \rightarrow \infty$  pour obtenir les équations d'Euler). Ce problème se règle avec l'équation d'Oseen et les raccordements asymptotiques. Cependant, Stokes reste une bonne approximation dans de nombreux cas, tel que celui que nous avons traité pour trouver la force fluide s'exerçant sur un cylindre de longueur finie. Le calcul théorique est ensuite appliqué à la propulsion flagellaire des micro-organismes.