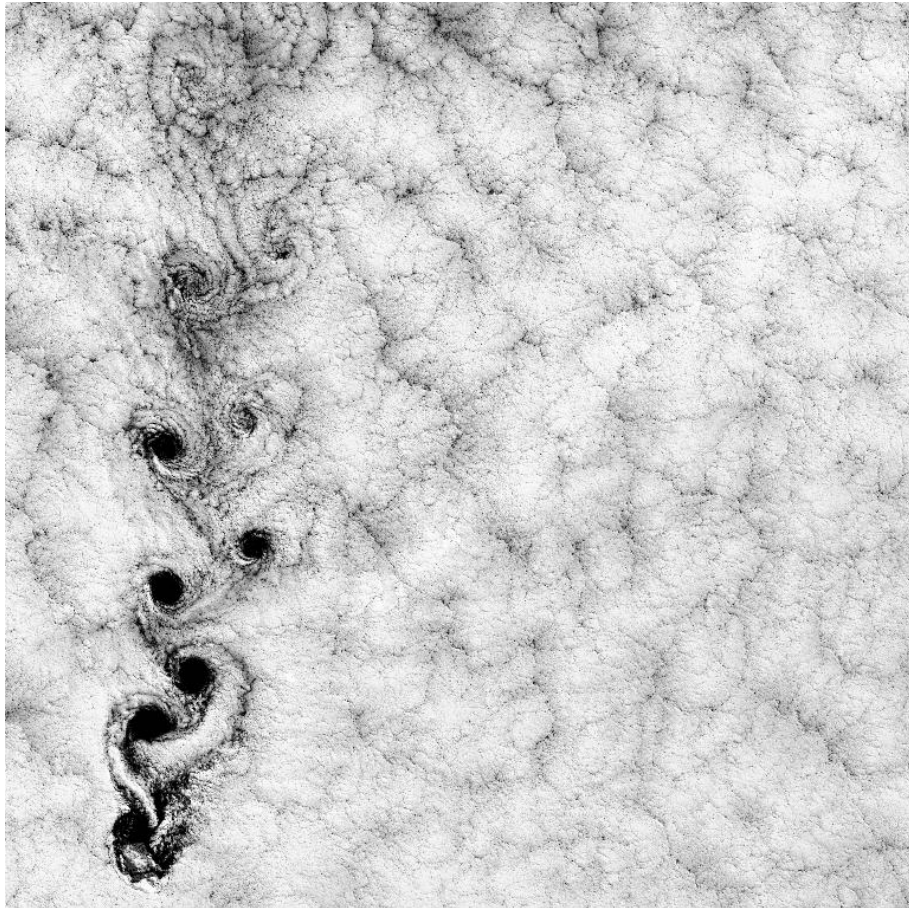


Mécanique des Fluides



José Bico, Marc Fermigier, Mathilde Reyssat

Photographie de couverture : allée de tourbillons de Bénard-von Karman sous le vent de l'île Alexander Selkirk (Image courtesy of USGS National Center for EROS and NASA Landsat Project Science Office).

Copyright J. Bico, M. Fermigier & M. Reyssat 2020
Reproduction interdite sans autorisation

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Du microscopique à la géophysique	1
1.2	Qu'est-ce qu'un fluide?	4
1.3	L'hypothèse de continuité	6
2	Cinématique	8
2.1	Descriptions eulérienne et lagrangienne.	8
2.2	Dérivée "particulaire" de la vitesse.	9
2.3	Conservation de la masse.	9
2.4	Fonction de courant	10
2.5	Différentes représentations d'un écoulement	11
2.5.1	Lignes de courant	11
2.5.2	Trajectoires de particules	11
2.5.3	Lignes d'émission	11
2.5.4	Champs de vortacité	11
2.6	Déformations dans un écoulement	14
2.6.1	Décomposition du gradient de vitesse	14
2.6.2	Écoulement de cisaillement simple	15
2.6.3	Écoulement élongationnel	15
3	Dynamique des fluides newtoniens	17
3.1	Bilan de quantité de mouvement dans un milieu continu	17
3.2	Contraintes dans un fluide visqueux	18
3.3	Équation de Navier-Stokes	19
3.4	Quelques données sur la viscosité dynamique	19
4	Similitude dynamique	21
4.1	Notion de similitude dynamique	21
4.2	Petit catalogue de nombres sans dimension en mécanique des fluides	22
5	Interfaces	24
5.1	Interface fluide-solide	24
5.2	Interface fluide-fluide. Tension de surface	24
5.2.1	Condition cinématique	24
5.2.2	Condition dynamique (contraintes)	25
5.2.3	Valeurs typiques de tension de surface	28
6	Écoulements à petits nombres de Reynolds	29
6.1	Le monde surprenant des petits nombres de Reynolds	29
6.1.1	L'équation de Stokes	30
6.1.2	Réversibilité cinématique	30
6.1.3	Additivité des solutions	33

6.2	Ecoulement autour d'une sphère. Suspensions	33
6.2.1	Ecoulement autour d'une sphère solide	33
6.2.2	Ecoulement autour d'une sphère fluide	35
6.2.3	Force sur un objet très allongé	35
6.3	Principe de la lubrification	35
6.4	Comment résoudre un problème de lubrification ?	38
6.4.1	Fluide confiné entre deux parois solides	38
6.4.2	Fluide confiné entre un solide et une interface fluide ou entre deux interfaces fluides	38
6.5	Ecoulement dans un milieu poreux	39
6.5.1	Loi de Darcy	39
6.5.2	Modèle de tubes tortueux	40
7	Couches limites	42
7.1	Notion de couche limite	42
7.1.1	Approximations de l'équation de Navier-Stokes dans une couche limite.	43
7.2	Couche limite sur une plaque plane : calcul de Blasius	44
7.3	Avec gradient de pression extérieur	48
7.3.1	Influence de l'accélération ou décélération de l'écoulement externe	48
8	Écoulements potentiels	49
8.1	Loi de Bernoulli	49
8.1.1	Évolution de l'énergie cinétique	49
8.1.2	Loi de Bernoulli en écoulement stationnaire	50
8.1.3	Loi de Bernoulli en écoulement potentiel	50
8.2	Conservation de la quantité de mouvement en l'absence de viscosité	51
8.3	Conservation de la circulation. Théorème de Kelvin.	51
8.4	Écoulements potentiels	52
8.4.1	Propriétés du potentiel des vitesses	52
8.4.2	Écoulements potentiels simples	52
8.4.3	Écoulement autour d'un cylindre	54
9	Portance et traînée	57
9.1	Forces sur un obstacle en écoulement potentiel	57
9.1.1	Potentiel des vitesses à grande distance du corps	57
9.1.2	Force sur un corps solide	58
9.1.3	Etablissement de la circulation autour d'un profil portant	60
9.2	Trainée de forme	61
9.2.1	Sillage des corps non profilés	61
9.2.2	Surfaces portantes	62
9.2.3	Contrôle de la couche limite	62
A	Propriétés physiques de quelques fluides	64
B	Notions élémentaires sur les tenseurs	65
B.1	Propriétés générales des tenseurs	65
B.2	Tenseur des contraintes	66
C	Coordonnées cylindriques et sphériques	68
C.1	Équation de Navier-Stokes	68
C.1.1	Coordonnées cylindriques r, θ, x	68
C.1.2	Coordonnées sphériques r, θ, φ	68
C.2	Relations entre vitesse, potentiel et fonction de courant	69
C.2.1	Écoulement bidimensionnel	69

C.2.2	Écoulement tridimensionnel	69
C.2.3	Écoulement tridimensionnel avec symétrie de révolution	69
D	Quelques repères historiques	70
E	Références bibliographiques	72
E.1	Références générales	72
E.2	Ouvrages plus spécialisés	72

Chapitre 1

Introduction

1.1 La mécanique des fluides du microscopique à la géophysique

La dynamique des fluides joue un rôle essentiel dans de nombreux systèmes avec des échelles de vitesse et de longueur extrêmement différentes, aussi bien dans les écoulements naturels que dans les procédés industriels.

Prenons quelques exemples pour illustrer cette ubiquité de la dynamique des fluides en commençant par un domaine classique de l'ingénieur : l'aéronautique. La conception aérodynamique d'un avion de ligne doit satisfaire, a priori, à des exigences relativement simples : assurer une force de sustentation (portance) donnée tout en minimisant la résistance à l'avancement (force de traînée) en vitesse de croisière et assurer la sécurité des phases transitoires de vol (décollage, atterrissage). L'écoulement de l'air autour des ailes ne sert qu'à modifier la répartition de pression de manière à assurer la sustentation de l'avion. En réalité, la conception des surfaces portantes nécessite de longues études expérimentales et numériques et des profils à géométrie variable sont utilisés dans les phases transitoires du vol. On pourrait penser, en comparant un Boeing 707 vieux de soixante ans et un récent Airbus A380, que l'aviation civile a atteint un optimum dans la conception, les deux avions ayant une forme générale très voisine. Néanmoins, le concept d'aile volante déjà utilisé en aviation militaire pourrait apporter des améliorations significatives de consommation et de nuisances sonores (Fig. 1.1).

Dans les applications aéronautiques, les vitesses d'écoulement mises en jeu vont du m/s à quelques centaines de m/s et les échelles de longueur caractéristiques de l'écoulement vont de quelques cm à quelques dizaines de m.

Pour descendre dans les échelles de longueur, empruntons un exemple à la biologie : la circulation de l'oxygène dans notre organisme est assurée par l'écoulement du sang à travers un système complexe de canalisations, artères et veines, dont le diamètre varie du cm à quelques microns. La consommation d'oxygène est régulée en partie par le débit sanguin : la fréquence cardiaque contrôle le débit global ; la vasodilatation permet un contrôle local du débit, par exemple lors d'un effort physique, la proportion de sang envoyé vers les muscles augmente. De nombreuses pathologies sont liées à l'obstruction partielle des vaisseaux et à la diminution de débit qui en résulte. Dans les systèmes biologiques, les effets purement mécaniques sont généralement intimement liés à des effets physico-chimiques. Ainsi l'adaptation à la vie en haute altitude conduit à une augmentation de la concentration en globules rouges, augmentation de concentration qui s'accompagne d'une augmentation de la viscosité du sang, donc d'une résistance à l'écoulement accrue.

Différence essentielle avec l'aéronautique : le rôle premier de l'écoulement du fluide est ici le transport de l'oxygène. Il existe un autre mécanisme de transport essentiel : la diffusion moléculaire (mouvement brownien) mais il est terriblement inefficace à grande échelle : il suffit de ne pas agiter son thé ou son café avec une cuillère pour se rendre compte que la diffusion du sucre est extrêmement lente.

Autre différence essentielle : le fluide mis en jeu n'est plus un corps simple en phase fluide



FIGURE 1.1 – Les progrès de l’aviation en un peu plus d’un siècle, depuis le planeur d’Otto Lilienthal (1894) jusqu’aux avions de ligne modernes Boeing 707 (1954), Airbus A380 et au concept d’aile volante, illustré par le prototype X48. Photos : Archive Otto-Lilienthal-Museum / www.lilienthal-museum.de, Boeing, Airbus et NASA.



FIGURE 1.2 – Photographie de l'ouragan Katrina sur le golfe du Mexique le 28 Aout 2005. Le tourbillon associé à la perturbation s'étend sur un millier de kilomètres.

mais un liquide complexe, une suspension de vésicules déformables, avec de nombreux ions et macromolécules en solution. Néanmoins, à une échelle macroscopique, son comportement peut être décrit par les mêmes équations qui régissent l'écoulement de l'air ou de l'eau.

Pour l'ingénieur du génie chimique, un écoulement est presque toujours le moyen utilisé pour amener les réactifs en contact. La technique dite du lit fluidisé, dans laquelle des particules solides sont mises en suspension par un courant ascendant de fluide est souvent mise à profit pour les réactions catalytiques, le catalyseur étant dispersé dans les particules solides.

Remontons maintenant dans les échelles de longueur pour examiner des écoulements à l'échelle de notre planète. La différence d'éclairement solaire entre les zones polaires et les zones tropicales induit de grandes différences de température entre les différentes régions du globe. Les écoulements atmosphériques et les courants marins servent essentiellement aux échanges de chaleur entre pôles et tropiques; la température moyenne qui règne à la surface du globe est impossible à évaluer correctement sans prendre en compte les effets de ces circulations à grande échelle. Par la même occasion, les écoulements atmosphériques transportent de nombreuses substances, en particulier les polluants et les cendres volcaniques. Par exemple, contrairement à ce que certains ont affirmé, les éléments radioactifs émis par l'accident de la centrale de Tchernobyl ne se sont pas arrêtés à nos frontières : ils ont été largement disséminés sur toute l'Europe. Heureusement, les écoulements atmosphériques ont également réalisé un mélange très efficace du nuage radioactif et ont permis la dilution des polluants.

Notre expérience quotidienne nous enseigne que les prévisions des météorologistes ne sont pas d'une fiabilité à toute épreuve. Pourtant ceux-ci utilisent à temps plein les plus puissants ordinateurs existants et les équations de la mécanique des fluides sont connues depuis le milieu du 19^e siècle. La prévision météorologique se heurte ici à un problème fondamental : l'existence de la turbulence et le caractère d'imprévisibilité à long terme des écoulements turbulents. L'examen de l'atmosphère révèle des mouvements à des échelles très différentes : un champ de blé dont la température est supérieure à celle du bois voisin suffit à provoquer une cellule de convection thermique dont l'extension ne dépasse pas quelques centaines de mètres. Le même phénomène se produit le long des côtes, provoquant la brise de mer ; cette fois, la convection fait sentir ses effets sur une dizaine de km. Les perturbations qui balaient régulièrement l'Atlantique Nord pendant l'hiver ou les ouragans (Fig. 1.2) sont des tourbillons de plusieurs centaines de km de diamètre. En haut de cette organisation, on trouve la circulation zonale : au niveau des tropiques les alizés soufflent essentiellement de l'est, alors qu'aux latitudes moyennes les vents d'ouest prédominent. L'existence de tourbillons sur une très grande gamme d'échelles spatiales est une des caractéristiques de la turbulence et l'une des raisons essentielles de la difficulté des simulations numériques.

Au-delà de la prévision météorologique, la mécanique des fluides joue un rôle essentiel dans la régulation et l'évolution climatique. La température moyenne de l'atmosphère est fortement influencée par l'effet de serre dû à l'absorption du rayonnement infra-rouge réémis vers l'espace par la vapeur d'eau, le CO₂, le méthane et d'autres gaz. Arrhénius avait déjà pressenti que l'utilisation massive de combustibles fossiles conduirait à un renforcement de l'effet de serre. Le réchauffement global dû aux activités humaines est maintenant un fait reconnu par l'ensemble de la communauté scientifique, mais pour en arriver là et pour tenter de prédire quelle sera l'importance de ce réchauffement dans les décennies à venir, il a fallu comprendre et modéliser la dynamique atmosphérique et la dynamique océanique (Fig. 1.3). Les modèles utilisés pour la prédiction climatique sont maintenant capables de reproduire assez fidèlement le climat passé et présent et peuvent être extrapolés jusqu'à la fin du 21^e siècle.

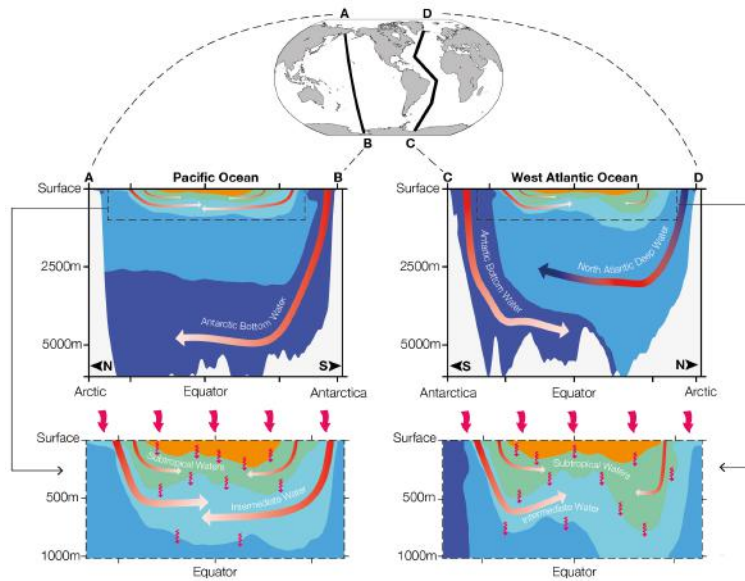


FIGURE 1.3 – Circulation océanique Nord-Sud dans le Pacifique et l'Atlantique. Figure tirée du rapport du GIEC "Climate Change 2013 : The Physical Science Basis".

Il est maintenant clair que l'humanité est en train de faire une expérience de climatologie sans précédent (l'ampleur du réchauffement sera comparable à celui de la dernière déglaciation il y a 15 000 ans) et devra subir des conséquences sans doute dramatiques¹. Il est donc crucial de trouver au plus vite des énergies de substitution aux combustibles fossiles. Dans ce domaine, la mécanique des fluides joue également un rôle important : l'utilisation systématique de l'énergie éolienne, de l'énergie des vagues, des courants de marée, permettra de répondre partiellement à cette demande. Mentionnons également les projets de tours solaires qui convertissent l'énergie solaire recueillie par des capteurs horizontaux en un écoulement d'air vertical dans une gigantesque cheminée. Il est malheureusement évident que ces procédés ne peuvent produire les quelques $4 \cdot 10^{20}$ J que l'humanité consomme actuellement² chaque année, mais il faudra peut-être s'en contenter.

1.2 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Pour le physicien versé vers la thermodynamique, un fluide est un corps simple, composé d'une assemblée d'atomes ou molécules identiques, en phase liquide ou gazeuse. La transition entre les

1. Voir l'excellent site de Jean-Marc Jancovici www.manicore.com et H. Le Treut, JM. Jancovici, "L'effet de serre" Flammarion 2004 ainsi que les documents publiés par l'IPCC (www.ipcc.ch).

2. P.B. Weisz, *Physics Today* **57**, n°7, 47 (2004)



FIGURE 1.4 – Glacier Barnard en Alaska. Photo : National Snow and Ice Data Center/World Data Center for Glaciology.

différents états s'accompagne de la discontinuité de certaines grandeurs thermodynamiques qui permettent de construire un diagramme des phases sans ambiguïté et sans avoir recours à une mesure des propriétés mécaniques. Par exemple, nous savons que, à la pression atmosphérique, l'eau se liquéfie à 0°C et se vaporise à 100°C , que l'hélium reste liquide à 0 K .

Le mécanicien donnerait une définition plus empirique : un fluide, c'est quelque chose qui coule. Vue depuis les sommets environnants, la Mer de Glace présente des bandes alternées, sombres et claires, de forme parabolique. Ces *bandes de Forbes* qui sont dues à l'alternance saisonnière de l'enneigement, révèlent le lent écoulement du glacier vers la vallée de Chamonix. Il s'agit bien d'eau en phase solide, mais la présence des crevasses et leur réarrangement permanent font, qu'à grande échelle, le glacier se comporte comme un liquide très visqueux (Fig. 1.4). Il en est de même des matériaux qui constituent le manteau terrestre. Observés sur des échelles de temps suffisamment longues, ils coulent comme des liquides.

Pour caractériser un matériau, le mécanicien mesurerait la déformation en fonction de la contrainte appliquée au matériau. Il définirait un solide à partir de sa réponse élastique : la déformation croît linéairement avec la contrainte appliquée. La déformation reste en général petite jusqu'à la rupture du solide. En revanche dans un fluide, la déformation peut être arbitrairement grande sans qu'il y ait une perte de cohésion. Pour un fluide visqueux, c'est la *vitesse de déformation* qui est proportionnelle à la contrainte appliquée. Une telle distinction entre fluides et solides basée sur la réponse à une sollicitation mécanique peut être plus subtile : les pâtes silicones vendues sous le nom de "silly-putty" se comportent à la fois comme des solides et comme des liquides. Une boule de silly-putty rebondit comme une balle de caoutchouc, pourtant la même boule de silly-putty abandonnée sur une table s'étalera lentement en une couche mince, comme le ferait une huile visqueuse ou du miel. Les macromolécules qui rentrent dans la composition du silly-putty ont un temps de réponse aux sollicitations extrêmement long (à l'échelle moléculaire), aussi leur réaction est-elle différente selon qu'elles ont le temps ou non de se déformer de manière significative.

Ainsi la notion de fluidité dépend de l'échelle spatiale d'observation (ou de sollicitation), c'est le cas du glacier, et du temps caractéristique d'observation du système, c'est le cas du silly-putty. Nous entrevoyons également ici la relation entre la structure microscopique des fluides et leurs propriétés mécaniques macroscopiques. L'étude du comportement sous écoulement (discipline qui porte le nom de rhéologie) joue un grand rôle dans de nombreuses industries (peintures, adhésifs, agro-alimentaire, extraction du pétrole, ...) et jusque dans la texture des aliments que nous absorbons.

Les relations structure-propriétés mécaniques sont en général difficiles à établir et mettent en œuvre des considérations subtiles de physique statistique. Un des exemples les plus frappants est l'ajout de polymères de très grande masse moléculaire dans un solvant. Une très petite quantité

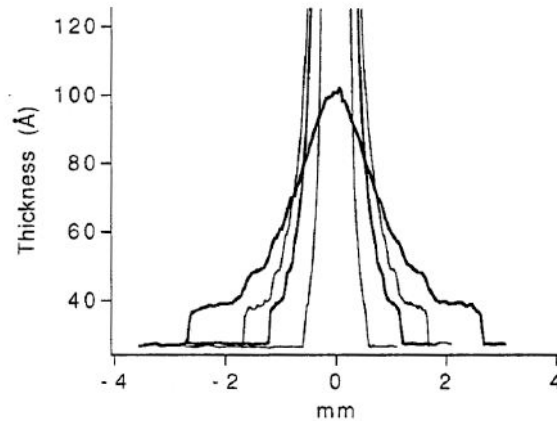


FIGURE 1.5 – Profil d'une goutte de polydiméthylsiloxane (huile silicone) s'étalant sur une surface de silicium. Épaisseur mesurée par ellipsométrie optique, 3.5 h, 11.4 h, 45.4 h et 148.9 h après le dépôt de la goutte. Noter que les échelles verticale et horizontale sont très différentes. D'après N. Fraysse et al., *J. Colloid Interface Sci.* **158**, 27 (1993)

de polymère (0,1 % en fraction massique) suffit à modifier considérablement la viscosité de la solution, du fait de l'enchevêtrement des chaînes macromoléculaires. On ne peut clore ce paragraphe sans mentionner les milieux granulaires secs (poudres, sable) du fait de leur importance dans l'industrie (beaucoup de matériaux sont stockés et transportés sous forme de poudres) et dans l'environnement. L'observation rapide de l'écoulement dans un sablier pourrait nous faire croire qu'il est possible d'analyser ce phénomène comme l'écoulement d'un fluide possédant des propriétés mécaniques particulières. En fait, il n'en est rien et la "physique du tas de sable" est un domaine assez éloigné de la mécanique des fluides et qui est encore en pleine évolution.

Pour illustrer le comportement particulier des milieux granulaires, considérons l'exemple simple de l'équilibre statique d'un silo : si on mesure la pression exercée sur le fond du silo en remplissant celui-ci de plus en plus, on constate que cette pression n'augmente plus au delà d'une certaine hauteur de remplissage, proportionnelle au diamètre du silo. Ce comportement, tout à fait différent de celui d'un liquide, est dû au frottement solide sur les parois latérales du silo qui supporte partiellement le poids de l'empilement de grains.

1.3 L'hypothèse de continuité

Si on considère un fluide simple comme l'air ou l'eau, le problème de l'échelle d'observation se pose également. À très petite échelle, il est impossible d'ignorer la nature atomique ou moléculaire des fluides. À ces échelles moléculaires, il est clair que les propriétés physiques d'un fluide varient très largement d'un point de l'espace à l'autre. Néanmoins, il suffit de considérer un volume de fluide assez grand à l'échelle microscopique pour que les propriétés du fluide, moyennées sur un grand nombre de molécules, apparaissent comme dépendant lentement de la coordonnée spatiale. Dans la plupart des situations pratiques, ce volume "suffisamment grand" reste très petit comparé aux dimensions globales de l'écoulement ; les mesures effectuées à cette échelle peuvent être considérées comme "locales".

Des expériences récentes et des simulations numériques de dynamique moléculaire ont permis de mieux cerner l'influence de la structure moléculaire sur les écoulements de films très minces de liquide. Lorsque l'épaisseur du film est inférieure à 10 diamètres moléculaires, l'organisation moléculaire du liquide est révélée par les "marches" que forme le liquide en s'étalant (Fig. 1.5).

Dans un gaz, c'est le libre parcours moyen qui fixe la limite de l'hypothèse de continuité.

Lorsque la pression est suffisamment basse pour que la distance moyenne entre molécules devienne plus grande que les dimensions caractéristiques de l'écoulement, on ne peut plus appliquer les lois classiques de la mécanique des fluides. Une telle situation se rencontre dans la très haute atmosphère (rentrée des véhicules spatiaux) et dans les systèmes d'ultravide utilisés en physique du solide. Dans la suite de ce cours, nous ignorerons ces subtilités et considérerons tous les fluides comme des milieux continus dont les propriétés physiques et la dynamique peuvent être décrits par des fonctions des coordonnées spatiales.

Chapitre 2

Cinématique

Avant d'aborder la dynamique des fluides elle-même, c'est-à-dire les lois qui relient les diverses forces agissant sur les fluides et les écoulements, leur organisation spatiale et leur évolution temporelle, il est nécessaire de définir quelques notions de cinématique :

- comment décrit-on les écoulements par les champs de vitesse ?
- quelle est la relation entre l'accélération d'une particule de fluide et le champ de vitesse ?
- quelle est la conséquence de la conservation de la masse sur le champ de vitesse ?
- quelles sont les particularités d'un écoulement à deux dimensions ?
- comment représente-t-on graphiquement les écoulements et comment met-on en évidence le champ de vitesse expérimentalement ?

2.1 Descriptions eulérienne et lagrangienne.

La description des écoulements est faite, dans la très grande majorité des cas, à partir du champ de vitesse \mathbf{u} défini comme une fonction des variables d'espace et du temps : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. C'est-à-dire qu'on définit ou mesure en chaque point \mathbf{x} de l'espace, et à tout instant, la vitesse macroscopique du fluide, moyennée sur une longueur grande devant les distances intermoléculaires. Du point de vue expérimental, cette description dite "eulérienne" correspond à une mesure locale de la vitesse du fluide, répétée en un très grand nombre de points de l'écoulement. Dans cette description, on observe différentes particules de fluide qui se succèdent en un même point de l'espace, comme lorsqu'on regarde l'eau défilier sous un pont. Si le champ de vitesse eulérien ne dépend pas du temps, l'écoulement est qualifié de *stationnaire* ; s'il dépend du temps, l'écoulement est *instationnaire*.

L'autre description, dite "lagrangienne", consiste à suivre le mouvement d'une même particule de fluide au cours du temps. Le champ de vitesse est alors spécifié sous la forme : $\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0, t)$ qui est la vitesse à l'instant t d'une particule de fluide qui se trouvait en \mathbf{r}_0 à l'instant t_0 . Cette description lagrangienne correspond aux expériences de visualisation dans lesquelles on dépose un traceur (particule solide, tache de colorant) en un point de l'écoulement et on suit la trajectoire de ce traceur. La trajectoire d'une particule de fluide est donnée par l'intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0, t') dt'$.

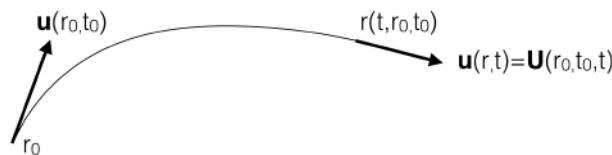


FIGURE 2.1 – Trajectoire d'une particule de fluide.

2.2 Dérivée “particulaire” de la vitesse.

Dans un écoulement, l'accélération d'une particule de fluide comporte, en général, deux contributions : la première contribution est due à la variation au cours du temps de la vitesse en chaque point de l'écoulement (caractère instationnaire de l'écoulement). La seconde contribution est due à l'exploration d'un champ de vitesse non uniforme par la particule de fluide. Même lorsque l'écoulement est stationnaire, si l'écoulement n'est pas uniforme, une particule de fluide va explorer au cours de son déplacement des zones de plus grande ou plus faible vitesse (voir, par exemple, l'écoulement dans un élargissement brusque représenté sur la Fig. 2.2) ; il en résulte un terme d'accélération “convective”.

La première contribution à l'accélération est la dérivée temporelle de la vitesse eulérienne : $\partial \mathbf{u} / \partial t$. La seconde contribution est liée au fait que la particule peut explorer des régions où la vitesse est différente. Si la particule de fluide se trouve en \mathbf{r}_0 à l'instant t , elle parcourt en un temps δt une distance $\delta \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) \delta t + O(\delta t^2)$. La vitesse du fluide au point $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}$ est : $\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) + \nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}$. L'accélération correspondante de la particule de fluide est : $(\nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{r}) / \delta t$. En prenant la limite $\delta t \mapsto 0$, $\delta \mathbf{r} / \delta t \mapsto \mathbf{u}$ et l'accélération convective s'écrit : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ de telle sorte que l'accélération totale d'une particule de fluide s'écrit :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.1)$$

Il faut noter que le gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$ est une quantité tensorielle dont les composantes sont $\partial u_i / \partial x_j$. En coordonnées cartésiennes, les trois composantes de l'équation 2.1 s'écrivent :

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\frac{Du_y}{Dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.4)$$

L'accélération convective est la projection du gradient de vitesse sur la direction locale de l'écoulement, c'est la variation spatiale de la vitesse vue en se déplaçant avec le fluide.

2.3 Conservation de la masse.

Écrivons le bilan de quantité de fluide entrant et sortant d'un volume de référence Ω , fixe par rapport au système de coordonnées dans lequel est exprimée la vitesse eulérienne \mathbf{u} . La variation par unité de temps de la masse contenue dans le volume Ω est égale à la masse traversant, par unité de temps, la surface $\partial \Omega$ qui délimite le volume Ω , soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, d\tau = - \int_{\partial \Omega} \rho \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

où ρ est la masse volumique du fluide, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface $\partial \Omega$ et orienté vers l'extérieur de celle-ci. En utilisant le théorème de la divergence pour transformer le second membre en intégrale de volume, et en intervertissant la différentiation temporelle et l'intégration dans le premier membre, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] d\tau = 0.$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume Ω considéré et l'intégrand est nul, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.5)$$

soit, en développant le second terme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.6)$$

La somme des deux premiers termes du membre de gauche est la dérivée “particulaire” (en suivant le mouvement du fluide) de la masse volumique. Si le fluide est incompressible, la masse volumique n’évolue pas au cours du temps et l’équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

L’équation 2.7 exprime la conservation du volume d’un élément de fluide au cours de sa déformation par l’écoulement. En pratique, un fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible si plusieurs conditions sont réunies :

- i) la vitesse typique de l’écoulement U est petite devant la vitesse du son c , c’est-à-dire, le nombre de Mach $M = U/c$ est petit devant l’unité. Dans l’eau où la vitesse du son est voisine de 1500 m/s cette condition est presque toujours vérifiée. En revanche, dans l’air où c est de l’ordre de 300 m/s, de nombreux écoulements, en particulier en aéronautique, sont influencés par la compressibilité du fluide.
- ii) dans un écoulement instationnaire, si ν est la fréquence typique de variation temporelle de la vitesse, ν doit être tel que $1/\nu \ll c/L$ où L est une dimension caractéristique de l’écoulement. C’est-à-dire qu’à l’échelle du temps typique de fluctuation de la vitesse, une onde de pression se propage très rapidement à travers tout l’écoulement. Il est évident que si on s’intéresse à la propagation des ondes sonores, par exemple au bruit rayonné par un jet turbulent, il faut tenir compte de la compressibilité du fluide.
- iii) enfin, il est nécessaire que la variation de pression due à une force extérieure (la gravité par exemple) soit petite devant la pression absolue. Cette dernière condition est presque toujours satisfaite, même si on considère des écoulements atmosphériques sur des échelles verticales très grandes.

En pratique, à l’exception notable des applications aéronautiques et de l’acoustique, les effets de compressibilité sont négligeables dans les écoulements et nous les ignorerons dans la suite de ce cours.

2.4 Écoulement 2D incompressible. Fonction de courant.

Dans deux nombreuses situations, il est possible de considérer que l’écoulement étudié est à la fois incompressible et bidimensionnel, ce qui en simplifie nettement la description. Le vecteur vitesse est alors décrit par deux composantes qui sont reliées par la condition de conservation de la masse $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cette condition peut être satisfaite en posant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.8)$$

La fonction ψ ainsi définie est la *fonction de courant*. En effet, les lignes $\psi = C^{te}$ ont la propriété d’être des lignes de courant. L’équation des lignes de courant est : $v dx - u dy = 0$, soit en remplaçant les composantes de vitesse par les dérivées de la fonction de courant :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -d\psi = 0.$$

Le débit (à 2D, une surface par unité de temps) entre deux lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ est donné par la différence de valeur de la fonction de courant entre ces deux lignes : $Q = \psi_2 - \psi_1$.

En effet, $Q = \int_1^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl$ où \mathbf{n} est la normale à une ligne quelconque joignant les lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$. Si (dx, dy) sont les composantes du vecteur tangent à la ligne d'intégration, celles de $\mathbf{n} dl$ sont $(dy, -dx)$ et le débit Q est :

$$Q = \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} (-dy) = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Ainsi, lorsqu'on représente un écoulement par des lignes de courant correspondant à des valeurs de ψ régulièrement espacées, le débit de fluide $Q = \Delta\psi$ est le même entre tous les couples de lignes adjacentes. L'espacement des lignes reflète directement la vitesse du fluide : la distance d entre les lignes de courant est inversement proportionnelle à la vitesse locale du fluide : $u = \Delta\psi/d$. De la même manière que le champ magnétique, qui est à divergence nulle, dérive d'un potentiel vecteur, le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel incompressible dérive du potentiel vecteur $\mathbf{A} = \psi \mathbf{k}$, \mathbf{k} étant le vecteur unitaire sur l'axe z .

Il est également possible de définir une fonction de courant dans un écoulement axisymétrique incompressible, par exemple, l'écoulement autour d'une sphère. Si le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée azimutale θ autour de l'axe de symétrie, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} = 0$$

où x est la coordonnée le long de l'axe de symétrie. Cette équation est satisfaite si :

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \text{ et } u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

2.5 Différentes représentations d'un écoulement

2.5.1 Lignes de courant

La structure d'un écoulement bidimensionnel est appréhendée facilement par une représentation des lignes de courant, tangentes en tout point au champ de vitesse instantané.

2.5.2 Trajectoires de particules

Expérimentalement, on ne peut pas mettre en évidence directement les lignes de courant. Pour matérialiser l'écoulement, on met en suspension des particules solides (idéalement de densité égale à celle du fluide) dont on suit la position au cours du temps (Fig. 2.3). Dans un écoulement stationnaire, les trajectoires des particules et les lignes de courant sont identiques, mais attention, ce n'est pas le cas dans un écoulement instationnaire.

2.5.3 Lignes d'émission

Une autre manière de visualiser expérimentalement un écoulement est d'injecter un traceur (par exemple un colorant dans un liquide, de la fumée dans l'air) en un ou plusieurs points. Les lignes ainsi matérialisées sont des *lignes d'émission*. En écoulement stationnaire, elles sont confondues avec les lignes de courant, mais pas en écoulement instationnaire (Fig. 2.4).

2.5.4 Champs de vorticité

Le rotationnel de la vitesse ou *vorticité* joue un rôle particulier dans la dynamique des écoulements, par exemple dans la compréhension des forces subies par une surface portante (aile d'avion, d'oiseau ou insecte). La vorticité est une mesure de la vitesse de rotation locale d'un élément de fluide. La concentration de la vorticité permet d'identifier des structures tourbillonnaires comme dans le sillage d'un obstacle (Fig. 2.5).

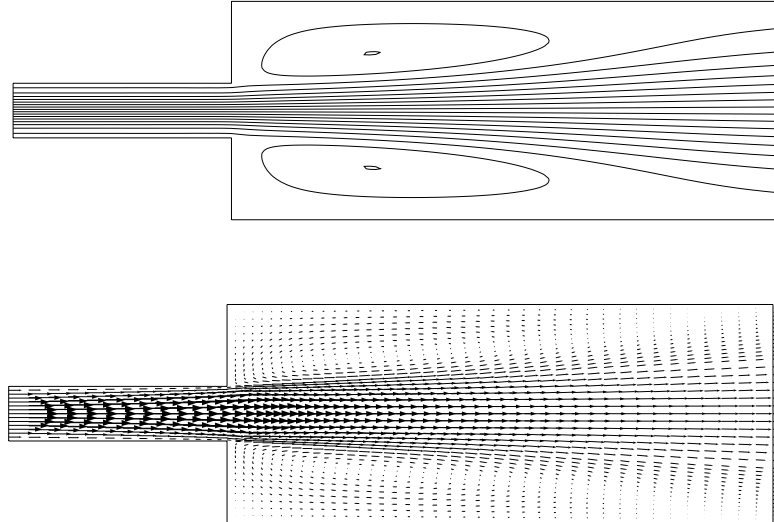


FIGURE 2.2 – Deux représentations du même écoulement bidimensionnel dans une expansion brusque, avec des lignes de courant (en haut) et des vecteurs vitesse (en bas). Les lignes de courant correspondent à des valeurs régulièrement espacées de la fonction de courant ; la distance entre deux lignes de courant est donc ici inversement proportionnelle à la vitesse locale.

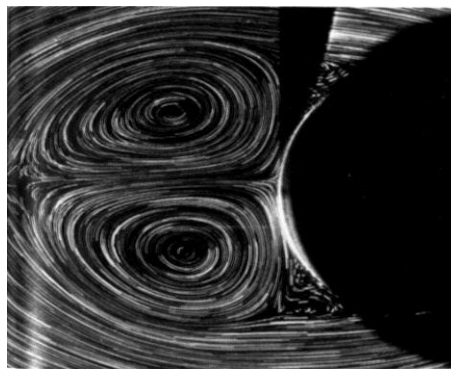


FIGURE 2.3 – Écoulement dans le sillage d'un cylindre mis brusquement en mouvement, matérialisé par des particules en suspension dans le fluide. Le temps d'exposition de la photographie est choisi pour que les trajectoires de particules matérialisent les lignes de courant. Photographie : R. Bouard et M. Coutanceau, *J. Fluid Mech.* **79**, 257 (1977)



FIGURE 2.4 – Écoulement instationnaire dans le sillage d'un cylindre (non visible, à gauche du cadre de la photo). Visualisation simultanée des lignes d'émission créées par injection de colorant sur le cylindre et de trajectoires de particules en suspension. Ces dernières révèlent la direction instantanée du vecteur vitesse. Cliché PMMH.

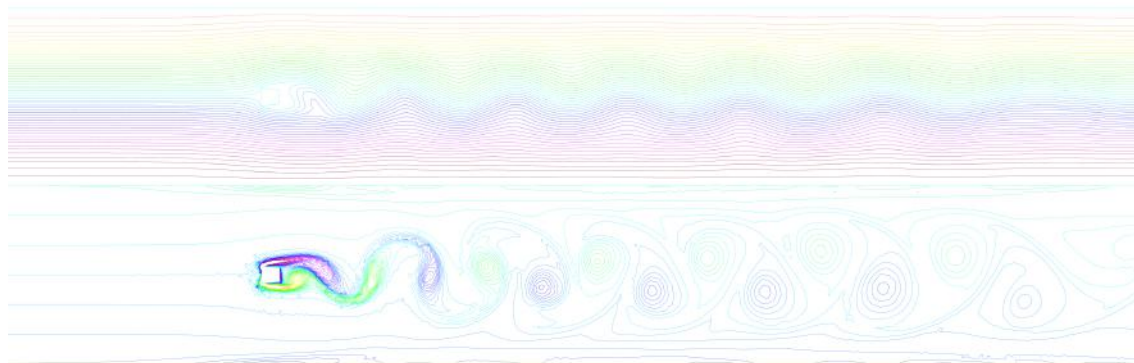


FIGURE 2.5 – Écoulement instationnaire dans le sillage d'un obstacle de section carrée, résultat de simulation numérique. En haut, lignes de courant. En bas, lignes d'égaux valeur de la vortacité au même instant.

2.6 Déformations dans un écoulement

2.6.1 Décomposition du gradient de vitesse

Nous verrons que la dynamique des écoulements est régie par les gradients de vitesse, c'est-à-dire par le mouvement relatif des particules de fluide. Il faut de ce fait analyser en détail les déformations subies par un élément de fluide placé dans un écoulement. Si deux particules de fluide sont placées respectivement en \mathbf{r} et $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, la différence de leur déplacement pendant un temps δt est : $\delta\epsilon = \nabla\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}\delta t$, soit pour la composante i du déplacement :

$$\delta\epsilon_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j \delta t \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta r_j \delta t$$

où on a utilisé la convention de notation de sommation implicite des indices répétés (ici j). Décomposons le gradient de vitesse en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.9)$$

où les parties symétrique et antisymétrique sont respectivement :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

Examinons d'abord la contribution de la partie symétrique à la déformation : $\delta\epsilon_i^s = e_{ij}\delta r_j\delta t$. Il existe un repère dans lequel le tenseur de rang deux symétrique e_{ij} est diagonal. Dans ce repère, notons les composantes de $\delta\mathbf{r}$: $\delta r'_i$. Alors, $\delta\epsilon^s = a\delta r'_1\mathbf{i}' + b\delta r'_2\mathbf{j}'$ où a, b, \mathbf{i}' et \mathbf{j}' sont respectivement les valeurs propres et directions propres de e_{ij} et où nous nous sommes limités pour simplifier à un espace bidimensionnel. Notons que : $a + b = e_{kk} = \text{div}\mathbf{u}$, la trace d'un tenseur étant invariante par changement de repère. Nous pouvons encore décomposer cette déformation en une partie isotrope et une partie anisotrope, soit :

$$\delta\epsilon^s = \left[\frac{a+b}{2}(\delta r'_1\mathbf{i}' + \delta r'_2\mathbf{j}') + \frac{a-b}{2}(\delta r'_1\mathbf{i}' - \delta r'_2\mathbf{j}') \right] \delta t$$

Le premier terme correspondant à un accroissement relatif de volume d'une quantité $\frac{a+b}{2}\delta t$. Le second terme correspondant à une déformation pure, sans changement de volume, d'amplitude : $(|a-b|/2)\delta t$.

Pour mieux comprendre l'effet de l'écoulement, déterminons la déformation d'un élément de fluide initialement circulaire. Le premier terme transforme le cercle de rayon R en un cercle de rayon : $R[1 + \frac{a+b}{2}\delta t]$ et le second terme transforme ce cercle en une ellipse dont les axes coïncident avec les axes propres du tenseur des taux de déformation. Les deux transformations sont illustrées sur la Fig. 2.6. Examinons maintenant la contribution de la partie antisymétrique du gradient de vitesse : $\delta\epsilon_i^a = \omega_{ij}\delta r_j\delta t$, toujours en nous limitant à deux dimensions pour simplifier l'analyse. Prenons : $\delta\mathbf{r} = (\delta r_1, \delta r_2)$; alors, $\delta\epsilon^a = (\omega_{12}\delta r_2\delta t, \omega_{21}\delta r_1\delta t) = \omega_{12}\delta t(-\delta r_2, \delta r_1)$, car les composantes diagonales de ω_{ij} sont nulles et $\omega_{21} = -\omega_{12}$. Le déplacement de l'extrémité du vecteur $\delta\mathbf{r}$ est orthogonal au vecteur $\delta\mathbf{r}$. L'effet de la partie antisymétrique du gradient de vitesse est de faire tourner ce vecteur d'un angle $\alpha \approx \omega_{12}\delta t$. Ceci est vrai quelle que soit l'orientation du vecteur $\delta\mathbf{r}$. Donc, l'effet de ω_{ij} est de faire tourner les éléments de volume de fluide, sans déformation, d'un angle α . On voit qu'à deux dimensions, ω_{ij} n'a qu'une seule composante indépendante, avec : $\omega = -2\omega_{12} = 2\omega_{21}$ et cette composante est telle que :

$$\text{rot}\mathbf{u} = \omega\mathbf{k} = \omega \quad (2.11)$$

Le même raisonnement s'applique à trois dimensions. On définit le vecteur ω comme la vorticité locale de l'écoulement. La vorticité représente le double de la vitesse angulaire de rotation d'un

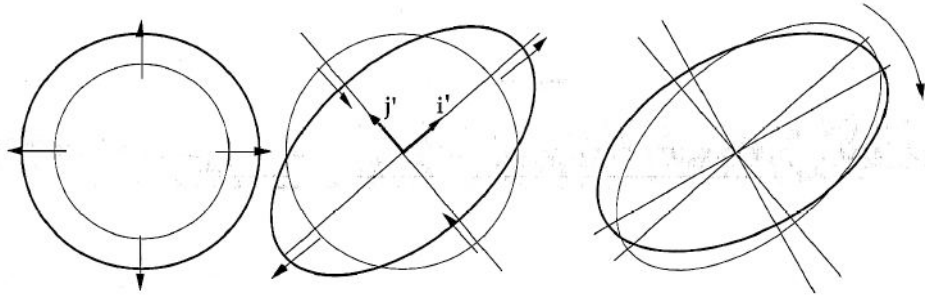


FIGURE 2.6 – Déformation d'un cercle par un écoulement. Dilatation globale, puis déformation à volume constant et enfin, rotation en bloc.

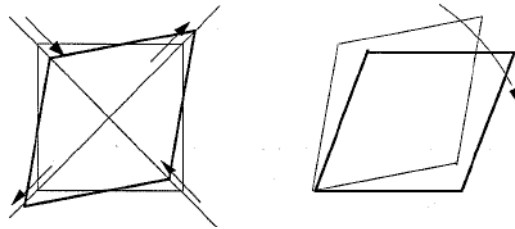


FIGURE 2.7 – Déformation d'un élément de fluide carré dans un écoulement de cisaillement simple : déformation sans changement de volume avec des axes propres à 45° puis rotation.

élément de fluide. Dans certains cas, la vorticité est nulle partout. l'écoulement est alors qualifié d'irrotationnel.

La figure 2.6 résume la décomposition du gradient de vitesse en trois termes :

- un terme symétrique isotrope qui représente la variation de volume d'un élément de fluide. Ce terme est nul si le fluide est incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$).
- un terme symétrique anisotrope qui représente une déformation pure, sans changement de volume.
- un terme antisymétrique qui représente une rotation en bloc, sans déformation. Ce terme est nul si l'écoulement est irrotationnel.

2.6.2 Écoulement de cisaillement simple

Appliquons la décomposition explicitée ci-dessus au cas de l'écoulement de cisaillement simple que l'on rencontre dans les viscosimètres à cylindres coaxiaux . Le champ de vitesse est : $u_x = Gy$, $u_y = 0$. La seule composant non nulle du gradient de vitesse est : $\partial u_x / \partial y = G$ et ses parties symétrique et antisymétrique sont respectivement :

$$e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & G \\ G & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$$

Le terme symétrique a une trace nulle, il n'y a donc pas de variation de volume des éléments de fluide. Ce terme symétrique a des axes propres orientés à 45° et les valeurs propres sont $G/2$ et $-G/2$. Enfin, le terme antisymétrique représente une rotation à la vitesse angulaire $-G/2$ (Fig. 2.7).

2.6.3 Écoulement élongationnel

Considérons maintenant un écoulement purement élongationnel. Le champ de vitesse est donné par la fonction de courant : $\psi = kxy$ qui correspond à : $u_x = kx$, $u_y = -ky$. Les lignes de courant

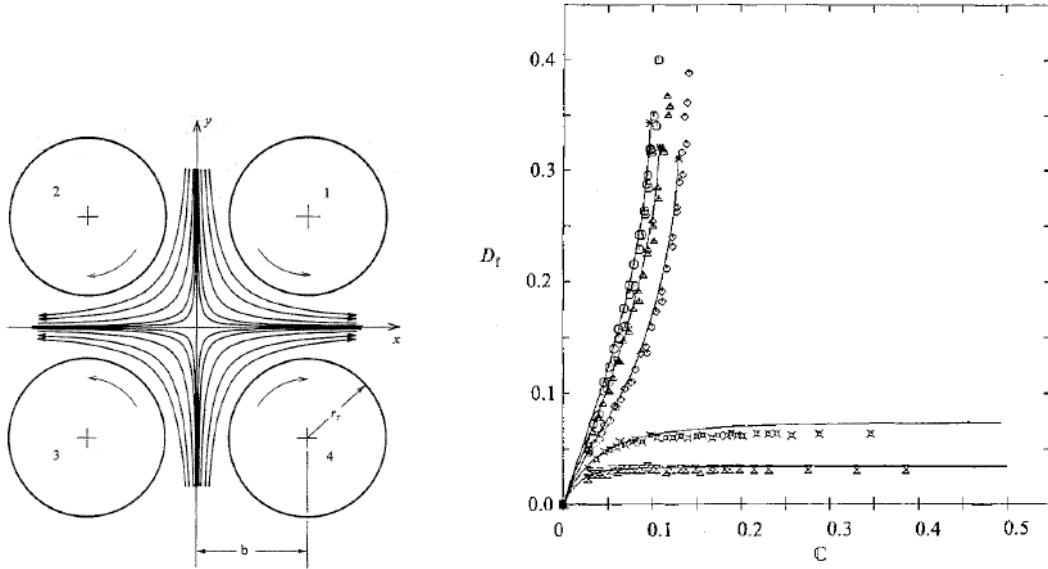


FIGURE 2.8 – À gauche : Appareil à quatre rouleaux pour produire un écoulement élongationnel. À droite : Déformation d'une gouttelette de fluide visqueux en fonction du nombre capillaire $Ca = \eta U / \gamma$. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la vorticité. La déformation la plus importante est obtenue pour une vorticité nulle. Figures tirées de Bentley et Leal, *J. Fluid Mech.* **167**, 219 (1986).

sont des hyperboles. Un tel écoulement peut être réalisé par un appareil à quatre rouleaux rotatifs (Fig. 2.8) ou par un système de jets opposés. Le gradient de vitesse est symétrique dans ce cas particulier :

$$G = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

Les axes propres sont confondus avec les axes x et y . Un cercle se déforme en une ellipse dont le grand axe est parallèle à l'axe x . Le gradient de vitesse n'ayant pas de partie antisymétrique, il n'y a pas de mouvement de rotation des éléments de fluide ; cet écoulement est un écoulement de déformation pure.

L'absence ou la présence d'une composante rotationnelle du gradient de vitesse peut avoir des conséquences importantes. Une solution de polymères placée dans l'appareil à quatre rouleaux présente une biréfringence assez importante. Cette anisotropie de l'indice de réfraction induite par l'écoulement est due à la déformation des macromolécules dans l'écoulement. En revanche dans un écoulement de cisaillement simple, la même solution de polymère soumise à un gradient de vitesse comparable ne présente pas de biréfringence notable. En effet, la composante rotationnelle du gradient change continuellement la direction d'élongation des macromolécules. Dans l'écoulement élongationnel, les macromolécules restent orientées dans la direction d'allongement et, de ce fait, le gradient de vitesse est beaucoup plus efficace pour déformer les polymères. Une observation similaire est faite concernant la déformation de gouttelettes (suspendues dans un autre liquide) placées dans les mêmes écoulements : les gouttelettes sont plus facilement déformées et fractionnées dans l'écoulement purement élongationnel (Fig. 2.8).

Chapitre 3

Dynamique des fluides newtoniens. Équation de Navier-Stokes

3.1 Bilan de quantité de mouvement dans un milieu continu

La variation temporelle de la quantité d'un mouvement d'un élément de fluide de volume Ω borné par une surface $\partial\Omega$ (Fig. 3.1) est donnée par la somme de trois termes :

- le flux net de quantité de mouvement traversant la surface $\partial\Omega$
- la somme des forces en volume agissant sur Ω
- la somme des forces de surface agissant sur $\partial\Omega$.

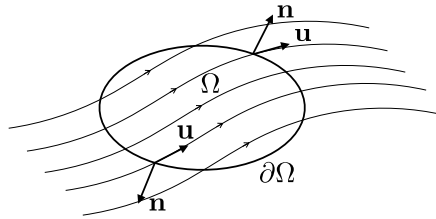


FIGURE 3.1 – Volume de contrôle pour le bilan de quantité de mouvement.

Le volume de fluide traversant la frontière $\partial\Omega$ par unité de surface et par unité de temps est $-\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ et la quantité de mouvement transportée par unité de volume est $\rho\mathbf{u}$. Le bilan de quantité de mouvement dans le volume Ω s'écrit donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho\mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\mathbf{n} dS \quad (3.1)$$

où \mathbf{f} est la force en volume par unité de masse (par exemple \mathbf{g}), $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ est le tenseur des contraintes et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$.

En utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\rho\mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla\cdot\rho\mathbf{u}\mathbf{u} dV = \int_{\Omega} \rho\mathbf{f} dV + \int_{\Omega} \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dV \quad (3.2)$$

Le terme $\nabla\cdot\rho\mathbf{u}\mathbf{u}$ s'écrit, pour sa composante i (la sommation sur les indices répétés est implicite) :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = u_i \frac{\partial\rho u_j}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

et le terme $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit pour sa composante i :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit le volume Ω , on peut l'écrire sous forme locale et non plus intégrale :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.3)$$

soit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.4)$$

La conservation de la masse du fluide impose : $\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$ et l'équation pour la quantité de mouvement se ramène donc à :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.5)$$

Le terme entre parenthèses dans le membre de gauche est l'accélération d'une particule de fluide. Elle fait intervenir, d'une part le caractère instationnaire de l'écoulement par la *variation temporelle* du champ de vitesse eulérien et, d'autre part, l'accélération convective due à la *variation spatiale* du champ de vitesse.

Pour obtenir une équation de la dynamique ne faisant intervenir que le champ de vitesse, il faut définir la relation existant entre le tenseur des contraintes et la vitesse, de la même façon qu'en élasticité l'équation de Lamé est obtenue en exprimant la relation entre contraintes et déformations.

3.2 Tenseur des contraintes dans un fluide visqueux incompressible (newtonien)

L'établissement rigoureux des relations entre le tenseur des contraintes et le champ de vitesse peut se faire dans un cadre de physique statistique hors d'équilibre en décrivant le mouvement microscopique des atomes ou des molécules et en évaluant le transfert de quantité de mouvement au sein du fluide. Dans un fluide au repos (sans écoulement macroscopique), le tenseur des contraintes se ramène à la pression : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}}$. Il n'y a que des contraintes normales et elles sont indépendantes de l'orientation. La pression p est ici la pression au sens de la thermodynamique et elle obéit à l'équation d'état du fluide.

Pour une large classe de fluides (les gaz, les liquides constitués de petites molécules), l'écoulement macroscopique ne modifie pas la structure microscopique du fluide. On peut alors faire l'hypothèse que les contraintes dépendent linéairement du champ de vitesse macroscopique. Le tenseur des contraintes (qui est symétrique) ne peut dépendre que de la partie symétrique du gradient de vitesse $\underline{\underline{\epsilon}} = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ sous la forme générale : $\sigma_{ij} = \sum_k \sum_l A_{ijkl} e_{kl}$.

Si le fluide est isotrope (contrairement par exemple aux cristaux liquides), le tenseur des propriétés mécaniques $\underline{\underline{A}}$ n'a que deux composantes non nulles. De la même manière, un matériau élastique isotrope est caractérisé par les deux coefficients de Lamé, ou de manière équivalente par son module d'Young et son coefficient de Poisson.

Si le fluide est de plus incompressible, il est caractérisé par sa seule viscosité dynamique η et la relation entre contrainte et champ de vitesse est :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$$

où p est toujours appelée la pression, mais ce n'est plus la pression au sens de la thermodynamique parce qu'elle dépend de l'écoulement.

Seule la partie symétrique du gradient de vitesse intervient, parce que la partie antisymétrique correspond à la rotation d'un élément de fluide sur lui-même, mais sans déformation.

En coordonnées cartésiennes l'expression du tenseur des contraintes est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.3 Équation de Navier-Stokes

En prenant en compte l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien incompressible, la divergence de $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit : $-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}$ et l'équation d'évolution de la quantité de mouvement est l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit, en notation vectorielle pour le champ de vitesse eulérien \mathbf{u} :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.7)$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique et \mathbf{f} la force extérieure exercée sur un élément de volume de masse unité (champ de pesanteur, électrique, magnétique...).

En notation indicielle pour la composante i de vitesse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (3.8)$$

où la sommation sur les indices répétés est implicite, en l'occurrence :

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1,3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

En coordonnées cartésiennes (x, y, z) , les trois composantes de l'équation de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + f_x \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + f_y \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + f_z \quad (3.11)$$

Noter que dans une direction où il n'y a pas de composante de vitesse, le gradient de pression dans cette direction est nul, en l'absence de force extérieure.

Par ailleurs, le champ de vitesse obéit à la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

3.4 Quelques données sur la viscosité dynamique

Il est bon d'avoir en tête quelques ordres de grandeur sur la viscosité dynamique des fluides. L'unité de viscosité du système international est le Pa.s ou Poiseuille.

La viscosité de l'eau à 20°C est 1 mPa.s. Celle de l'air, toujours à 20°C est $1,8 \cdot 10^{-5}$ Pa.s. Le glycérol est typiquement mille fois plus visqueux que l'eau.

La viscosité des liquides décroît avec la température. C'est un effet qu'on observe clairement en faisant chauffer de l'huile dans une poêle. En revanche, la viscosité des gaz augmente avec la

température. Cette différence de comportement s'explique par la différence de structure microscopique : un liquide est une phase dense où la distance moyenne entre molécules est comparable à leur taille alors que dans un gaz le libre parcours moyen est beaucoup plus grand que la taille des atomes ou des molécules.

À très basse température, on peut observer des effets quantiques sur la viscosité. L'hélium qui est liquide en dessous de $4,2^\circ\text{K}$, présente une transition de superfluidité à $1,6^\circ\text{K}$: la viscosité devient complètement nulle, résultat d'une condensation de Bose et d'un comportement "cohérent" des atomes d'hélium.

Chapitre 4

Similitude dynamique

4.1 Notion de similitude dynamique

Une fois qu'une solution de l'équation de Navier-Stokes a été obtenue avec des conditions aux limites particulières, on peut se demander si cette solution est également observée dans des écoulements géométriquement similaires. Deux écoulements sont géométriquement similaires si toutes leurs dimensions sont homothétiques. Considérons par exemple l'écoulement autour d'un obstacle placé dans un canal (Fig. 4.1). La géométrie de l'écoulement est complètement définie par la donnée de la largeur L du canal et par tous les rapports entre L , la longueur du canal et les dimensions de l'obstacle.

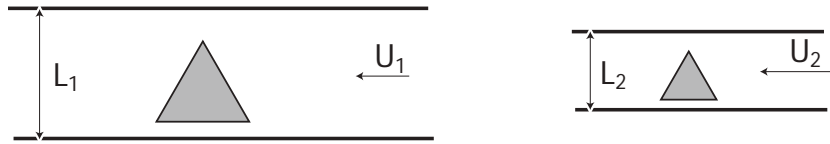


FIGURE 4.1 – Deux écoulements géométriquement similaires caractérisés par les longueurs L_1 et L_2 et par les vitesses U_1 et U_2

De la même manière, il est possible de caractériser le champ de vitesse par une vitesse représentative U . Dans le cas d'un écoulement dans un canal, U peut être la vitesse moyenne d'écoulement. Le champ de vitesse est alors fixé par la donnée de L et U par des fonctions sans dimension $u' = u/U$ de coordonnées d'espace sans dimension $r' = r/L$.

Écrivons l'équation de Navier-Stokes avec ces variables sans dimension, en omettant le terme de force en volume. Nous définissons un temps caractéristique $\tau = L/U$.

L'équation s'écrit :

$$\frac{U}{\tau} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' - \frac{U}{L^2} \nu \Delta' \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho L} \nabla' p' \quad (4.1)$$

où t' est un temps adimensionnel : $t' = t/\tau$ et les dérivées spatiales avec des ' sont prises par rapport à la variable sans dimension r' ($\partial/\partial r = 1/L \partial/\partial r'$).

En reportant la valeur de τ dans 4.1 et en divisant par U^2/L , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' - \frac{\nu}{UL} \Delta' \mathbf{u}' = -\nabla' p' \quad (4.2)$$

où nous avons défini une pression adimensionnelle : $p' = p/\rho U^2$. En effet, $1/2 \rho U^2$ qui est l'énergie cinétique (typique) par unité de volume a la dimension d'une pression. C'est ce qu'on nomme la *pression dynamique*.

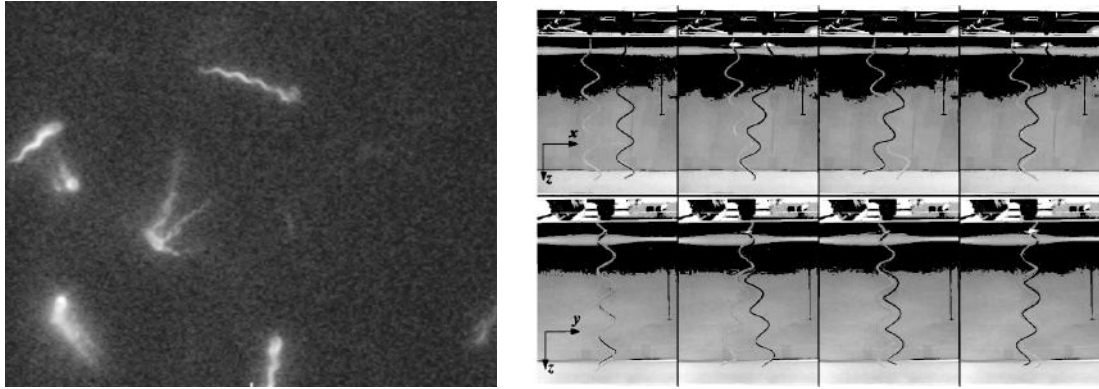


FIGURE 4.2 – Exemple de similitude en nombre de Reynolds : l'étude de la propulsion de la bactérie *Escherichia Coli*. À gauche, des bactéries vues au microscope, les flagelles moteurs (quelques microns de longueur, tournant dans l'eau à une centaine de Hz) sont visualisés par des marqueurs fluorescents. Image réalisée par le groupe de H.C. Berg à Harvard (<http://www.rowland.harvard.edu/labs/bacteria/index.html>). À droite, un modèle macroscopique réalisé avec des hélices (de taille centimétrique) qui tournent dans un bain de glycérine, à une vitesse angulaire de l'ordre du Hz. La séquence d'images montre l'appariement des deux hélices tournant dans le même sens. Image tirée de M. Kim et al., "A macroscopic scale model of bacterial flagellar bundling", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **100**, 15481 (2003).

L'équation de Navier-Stokes ainsi écrite ne comporte plus que des termes sans dimension et les paramètres physiques qui déterminent l'écoulement apparaissent uniquement dans le rapport : ν/UL qui est l'inverse du nombre de Reynolds. Si on obtient une solution de l'équation de Navier-Stokes avec des conditions aux limites prescrites par U , L et par des combinaisons des variables d'espace sans dimension, cette solution sera également valide si la vitesse caractéristique U , la longueur caractéristique L ou la viscosité du fluide sont modifiées à condition que le nombre de Reynolds reste le même. Ces écoulements ont une *similitude dynamique* (Fig. 4.2).

Lorsqu'il n'y a pas de force en volume, les seuls paramètres qui caractérisent le fluide sont sa viscosité dynamique et sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est une estimation du rapport entre les effets d'inertie et les effets de viscosité. On peut le voir également en considérant l'importance relative des termes $\mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}'$ et $(\nu/UL)\Delta' \mathbf{u}'$ dans l'équation 4.2. Si U et L sont convenablement choisis pour représenter l'écoulement, toutes les variables sans dimension (avec des ') sont d'ordre unité, de telle sorte que $\mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}'$ et $\Delta' \mathbf{u}'$ sont du même ordre de grandeur. Le rapport du terme inertiel $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ et du terme lié à la viscosité $\nu \Delta \mathbf{u}$, dans l'équation de Navier-Stokes, est précisément le nombre de Reynolds.

Lorsque des effets physiques autres que l'inertie et la viscosité entrent en jeu, d'autres paramètres de similitude apparaissent. Par exemple, si on rajoute un terme de gravité à l'équation de Navier-Stokes, le rapport des effets inertiels sur les effets de gravité est, en ordre de grandeur, U^2/gL . Ce rapport est le nombre de Froude. Si l'on veut respecter l'importance relative des effets inertiels et des effets de gravité, par exemple pour étudier le sillage d'un bateau dans un essai sur maquette, il faut travailler à nombre de Froude constant.

4.2 Petit catalogue de nombres sans dimension en mécanique des fluides

Les paramètres physiques intervenant dans les nombres sans dimension sont une échelle de longueur L , de temps t , de vitesse U , de température T ainsi que les propriétés physiques du fluide

masse volumique ρ , viscosité dynamique η et la tension superficielle γ .

— nombre de Bond : rapport des effets de gravité et de la tension superficielle.

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma} = \frac{L^2}{l_c^2}$$

où $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur capillaire.

— nombre capillaire : rapport des effets de la viscosité et de la tension superficielle.

$$Ca = \frac{\eta U}{\gamma}$$

— nombre d'Ekman : rapport des effets visqueux et de la force de Coriolis dans un écoulement en rotation à vitesse angulaire Ω

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2}$$

— nombre de Froude : rapport des effets inertiels et de la gravité.

$$Fr = \frac{U^2}{gL}$$

— nombre de Mach : rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son c .

$$M = \frac{U}{c}$$

— nombre de Rayleigh : rapport entre la force d'Archimède créée par l'expansion thermique et des effets de diffusion thermique et de quantité de mouvement.

$$Ra = \frac{\alpha \rho g \Delta T L^3}{\nu \kappa}$$

où α est le coefficient d'expansion thermique, κ la diffusivité thermique et ΔT est la variation de température sur l'échelle L .

— nombre de Reynolds : rapport des effets inertiels et des effets de viscosité

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

— nombre de Rossby : rapport de l'accélération convective et de la force de Coriolis dans un écoulement en rotation à vitesse angulaire Ω

$$Ro = \frac{U}{\Omega L}$$

— nombre de Stokes : rapport de l'inertie d'une particule solide et des forces visqueuses

$$St = \frac{\rho_s LU}{\eta}$$

où ρ_s est la masse volumique de la particule et L sa taille.

— nombre de Strouhal : fréquence normalisée pour un écoulement instationnaire

$$St = \frac{L}{Ut}$$

— nombre de Weber : rapport des effets inertiels et de la tension superficielle

$$We = \rho U^2 L / \gamma$$

Chapitre 5

Interfaces

L'équation de mouvement et l'équation de conservation de la masse déterminent le champ de vitesse et le champ de pression. Mais les solutions de ces équations dépendent des conditions aux limites auxquelles obéissent la vitesse et les contraintes.

5.1 Interface fluide-solide

Toutes les observations expérimentales macroscopiques s'accordent pour affirmer que la vitesse d'un fluide s'annule au voisinage immédiat d'une paroi solide. Le fait que la composante de la vitesse normale à la paroi étanche soit nulle est naturelle : le fluide ne pénètre pas dans le solide. En revanche, la nullité de la composante de vitesse tangente à la paroi est liée à l'existence de la viscosité : une discontinuité de la vitesse conduirait à une contrainte de cisaillement infinie et donc, à une divergence de l'énergie dissipée dans l'écoulement.

Ces constats sont toutefois à nuancer à des échelles microscopiques (typiquement quelques nm). Dans certaines conditions, on peut observer un glissement moyen du fluide par rapport à la paroi solide¹. Ce glissement peut ainsi influencer l'étalement de films liquides extrêmement fins ou l'écoulement dans des microcanaux.

Dans certaines conditions d'écoulement que nous définirons plus loin dans le cours, les effets de la viscosité peuvent être négligés. On peut alors résoudre les équations de mouvement comme si le fluide était parfait, c'est-à-dire, sans viscosité. Alors, la présence d'une paroi solide impose uniquement la nullité de la composante de vitesse normale à la paroi.

5.2 Interface fluide-fluide. Tension de surface

5.2.1 Condition cinématique

De la même manière qu'à une interface fluide-solide, une discontinuité de la composante de vitesse *tangente* à l'interface imposerait une contrainte de cisaillement infinie. Une condition purement cinématique assure que la composante de vitesse *normale* à l'interface soit également continue à travers cette interface. En effet, l'interface se déplace à la même vitesse que les éléments de fluide placés à son contact.

Si nous nous plaçons dans un repère local défini par la normale à l'interface (Fig. 5.1), où ζ , w_1 et w_2 sont respectivement la position de l'interface et les vitesses normales dans chacun des fluides,

1. Huang, P., Guasto, J.S. & Breuer, K.S. Direct measurement of slip velocities using three-dimensional total internal reflection velocimetry, *J. Fluid Mech.* **566**, 447 (2006) ; P. Joseph & P. Tabeling, *Phys. Rev. E* **71**, 035303(R) (2005) ; Pit R., Hervet H., Leger L. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 980 (2000)

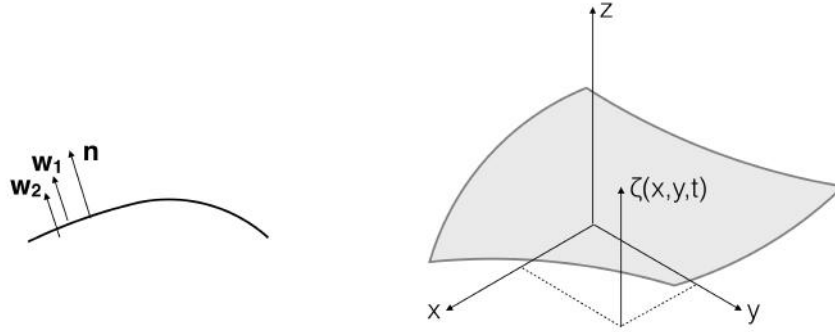


FIGURE 5.1 – Interface entre deux fluides

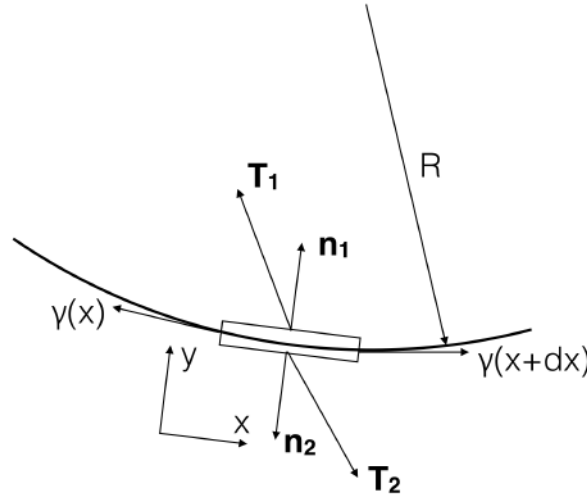


FIGURE 5.2 – Forces à l'interface entre deux fluides

cette condition cinématique s'écrit :

$$\frac{d\zeta}{dt} = w_1 = w_2 \quad (5.1)$$

Plus généralement, si la position de l'interface est donnée comme une fonction dépendant de deux coordonnées d'espace et du temps $z = \zeta(x, y, t)$, la condition cinématique s'écrit :

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} u_y + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv \frac{D\zeta}{Dt} \quad (5.2)$$

c'est-à-dire que la *dérivée particulaire* (en suivant le mouvement du fluide) de la position de l'interface ζ selon l'axe z est égale à la composante de vitesse suivant z .

5.2.2 Condition dynamique (contraintes)

Examinons maintenant la relation qui existe entre les contraintes de part et d'autre de l'interface. Considérons un élément de volume placé à cheval sur l'interface, dont les faces sont parallèles à l'interface et dont l'épaisseur, perpendiculairement à l'interface, est très petite (fig. 5.2). La résultante des forces sur cet élément de volume est :

$$\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 + \gamma(x+dx)\mathbf{t}(x+dx) - \gamma(x)\mathbf{t}(x) = [\sigma_{ij}n_j]_1 dx + [\sigma_{ij}n_j]_2 dx + \partial_x(\gamma\mathbf{t})dx.$$

\mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 étant les forces de surface de part et d'autre de l'interface, \mathbf{t} et \mathbf{n} les vecteurs tangents et normaux et γ la tension de surface et x la coordonnée le long de l'interface.

La tension de surface correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour créer une interface d'aire unité. On peut aussi considérer γ comme une force par unité de longueur, s'exerçant dans le plan de l'interface et qui assure la cohésion de cette interface.

La résultante des forces sur le volume entourant l'interface est nulle lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers 0.

Contraintes tangentielles

La projection de l'équilibre sur la tangente à l'interface donne :

$$[\sigma_{xy}]_1 - [\sigma_{xy}]_2 = \frac{d\gamma}{dx} \quad (5.3)$$

Si la tension de surface est uniforme, les contraintes tangentielles de part et d'autre de l'interface sont égales. Dans la situation particulière où il y a un écoulement de cisaillement simple de chaque côté, on a alors :

$$\eta_1 \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_1 = \eta_2 \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_2 \quad (5.4)$$

η_1 et η_2 étant les viscosités dynamiques des fluides 1 et 2. Dans le cas d'une interface liquide-gaz, la viscosité dynamique du gaz étant très petite devant celle du liquide, on peut considérer que la contrainte tangentielle (et donc le gradient de vitesse) est nulle dans le liquide.

En revanche, la situation est différente si la tension de surface varie d'un point à un autre, soit parce que la température de surface n'est pas uniforme, soit parce que la composition du liquide en volume n'est pas uniforme, soit enfin parce que des surfactants sont présents à l'interface en concentration variable. Le gradient de tension de surface doit être équilibré par le saut de contraintes tangentielles. Dans le cas d'une interface liquide-gaz, le gradient de tension de surface équilibre essentiellement la contrainte tangentielle dans le liquide. Les écoulements induits par une variation locale de la tension de surface sont souvent appelés *écoulements de Marangoni*.

Les "larmes de vin" qui se forment sur le bord d'un verre rempli de vin ou d'alcool fort (Fig.5.3) sont une conséquence de la différence de tension superficielle entre l'eau ($\gamma = 73$ mN/m) et l'éthanol ($\gamma = 22$ mN/m). Dans le film de liquide qui se forme sur le bord du verre, l'éthanol s'évapore plus facilement. Ce film est donc moins riche en alcool que le bain et la tension de surface y est plus élevée. Il en résulte une force nette qui tire le liquide vers le haut. Le liquide s'accumule en haut du film et finit par redescendre en gouttes (les larmes du vin) sous l'effet de la gravité.

Contraintes normales

La projection de l'équilibre des forces sur la normale à l'interface donne, en utilisant $d\mathbf{t}/dx = \mathbf{n}/R$ où R est le rayon de courbure de l'interface,

$$([\sigma_{yy}]_1 - [\sigma_{yy}]_2) + \frac{\gamma}{R} = 0$$

Lorsque l'interface est courbe, l'existence d'une tension interfaciale se traduit par une discontinuité des contraintes normales à la traversée de l'interface. Le raisonnement que nous venons de faire sur un élément de volume bidimensionnel peut être refait en trois dimensions. Il conduit à :

$$[\sigma_{nn}]_1 - [\sigma_{nn}]_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) = \gamma C \quad (5.5)$$

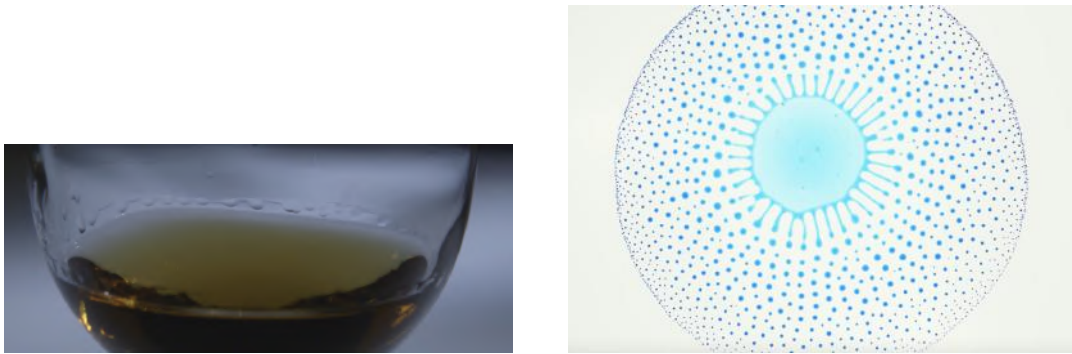


FIGURE 5.3 – Deux exemples d'écoulements induits par un gradient de tension de surface, les larmes de vin, à gauche, et l'explosion d'une goutte d'alcool posée sur un bain d'huile, à droite (L. Keiser *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 074504 (2017)).

où R_a et R_b sont les rayons de courbure de l'interface dans deux plans orthogonaux et C est la courbure totale de l'interface. En l'absence d'écoulement élongationnel, lorsque les contraintes normales se réduisent à $-p$, l'équation 5.5 devient :

$$p_2 - p_1 = \gamma C \quad (5.6)$$

la pression étant la plus élevée à l'intérieur de la courbure (l'intérieur d'une bulle est en surpression). C'est l'équation classique définissant la pression capillaire ou pression de Laplace.

Pour une sphère de rayon R , la courbure totale est $2/R$. La surpression dans une goutte sphérique est donc $2\gamma/R$. Une bulle de savon a deux interfaces eau savonneuse/air et la surpression à l'intérieur de la bulle est $4\gamma/R$, l'épaisseur du film de savon étant très petite devant le rayon de la bulle.

Une surface plane a naturellement une courbure nulle et il n'y a dans ce cas pas de différence de pression associée à la tension de surface. Attention, il existe des surfaces courbes dont la courbure totale est nulle. C'est le cas de la caténoïde, une surface de révolution dont les deux courbures dans des plans orthogonaux sont exactement opposées.

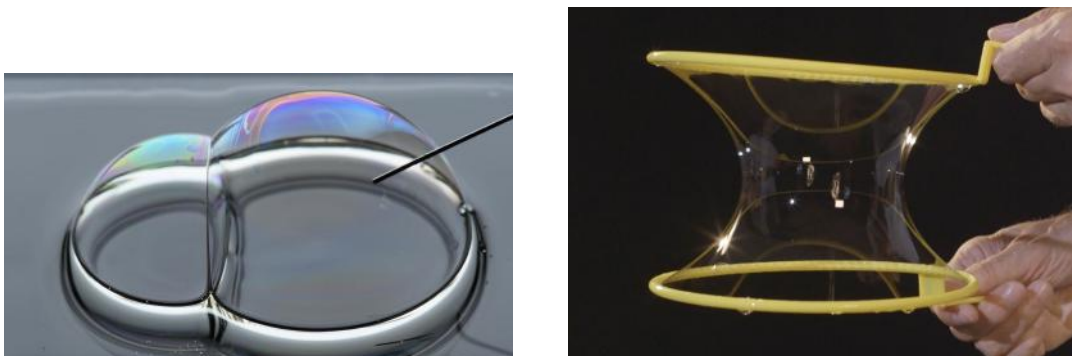


FIGURE 5.4 – À gauche : deux bulles de savon en contact. Noter que, la petite bulle étant à une pression interne plus élevée que la grosse, le film de séparation est bombé vers la grosse bulle. À droite : caténoïde de savon supportée sur deux cercles.

5.2.3 Valeurs typiques de tension de surface

La tension de surface γ est directement liée à l'énergie de cohésion des liquides. Sa valeur est donnée par l'énergie d'interaction E entre deux atomes ou molécules, divisée par le carré de la taille a de ces atomes ou molécules. Dans une huile minérale où les interactions moléculaires sont de type Van Der Waals, E est de l'ordre de $4 \cdot 10^{-21}$ J, a est de l'ordre de quelques dixièmes de nm et $a^2 \sim 2 \cdot 10^{-19}$ m², ce qui donne $\gamma \approx 20$ mJ/m². C'est effectivement l'ordre de grandeur de la tension de surface des huiles et des solvants organiques.

L'eau est plus cohésive du fait des interactions hydrogène et sa tension de surface est de l'ordre de 70 mJ/m².

Enfin dans les métaux liquides, les énergies de cohésion sont encore beaucoup plus grandes. Ainsi la tension de surface du mercure est près de 500 mJ/m².

Chapitre 6

Écoulements à petits nombres de Reynolds

6.1 Le monde surprenant des petits nombres de Reynolds

Le transport de la quantité de mouvement peut être dû à la viscosité ou bien à la convection par l'écoulement lui-même (inertie). L'importance relative de ces deux mécanismes de transport peut être appréciée par la valeur du nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$. La faible valeur de la viscosité de l'eau et de l'air fait que la plupart des écoulements que nous observons dans la vie courante sont des écoulements à grand nombre de Reynolds où l'inertie est prépondérante devant la viscosité. Aussi, nombre de raisonnements intuitifs que nous avons sur les écoulements sont influencés par cette expérience quotidienne et ne s'appliquent pas lorsque le nombre de Reynolds est petit.

Dans quelles situations les effets visqueux sont-ils dominants ? Quelles sont les particularités des écoulements correspondants ? La définition de Re nous montre que nous pouvons rendre la viscosité prépondérante de trois manières :

- en diminuant la vitesse,
- en diminuant la taille de l'écoulement,
- en augmentant la viscosité.

Des écoulements à vitesse extrêmement faible sont rencontrés en géophysique : l'écoulement d'un glacier ou le mouvement du magma dans le manteau terrestre. Bien que les matériaux mis en jeu ne soient pas, à proprement parler, des fluides, leur mouvement sur des échelles de temps suffisamment longues peuvent être décrits comme ceux d'un liquide très visqueux avec une inertie complètement négligeable.

Parmi les écoulements avec des échelles de longueur très petites, mentionnons les écoulements dans les milieux poreux (roches poreuses, colonnes de chromatographie) et les écoulements autour de petites objets en suspension (micro-organismes, macromolécules, particules colloïdales). Les développements récents des microsystèmes mécaniques (MEMS) et des dispositifs d'analyse physico-chimique intégrés ("laboratoires sur puce") accroissent encore le champ d'application des écoulements à petits nombres de Reynolds.

Ce monde des petits nombres de Reynolds est particulièrement bien décrit dans le "MOOC" de G.I. Taylor : <https://youtu.be/51-6QCJTAjU>

6.1.1 L'équation de Stokes

En éliminant de l'équation de Navier-Stokes les termes proportionnels à la masse volumique du fluide, on obtient l'équation de Stokes :

$$\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p - \rho \mathbf{f} \quad (6.1)$$

Le point fondamental est que le terme non linéaire en vitesse de l'équation de Navier-Stokes a disparu ; l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles *linéaire*. Les écoulements à petits nombres de Reynolds ont presque toujours lieu dans des conditions où le fluide est incompressible. Le mouvement du fluide est donc spécifié par l'équation de Stokes et par l'équation de conservation : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. En combinant ces deux équations, il est possible de reformuler l'équation de Stokes de deux manières :

— i) en prenant le rotationnel de (6.1), on obtient :

$$\Delta \omega = 0 \quad (6.2)$$

où on a introduit la vorticité ω qui est le rotationnel du champ de vitesse. Dans un écoulement à très petit nombre de Reynolds, la vorticité obéit donc à l'équation de Laplace. On utilisera (6.2) en particulier si les conditions aux limites sont spécifiées en fonction du champ de vitesse.

— ii) en prenant la divergence de (6.1), on obtient :

$$\Delta p = 0 \quad (6.3)$$

ce qui montre que le champ de pression obéit également à l'équation de Laplace. On utilisera (6.3) si les conditions aux limites sont spécifiées en fonction de la pression. Après calcul de p , la vitesse sera déterminée à l'aide de (6.1).

On peut remarquer que la viscosité a disparu des équations (6.2) et (6.3) : η détermine seulement l'amplitude relative du gradient de pression et de la vitesse. C'est-à-dire que, pour des conditions aux limites données, les lignes de courant seront toujours les mêmes, quelle que soit la viscosité du fluide, à condition que le nombre de Reynolds reste très petit devant 1.

6.1.2 Réversibilité cinématique

Une des conséquences remarquables de la linéarité de l'équation de Stokes est la *réversibilité cinématique* des écoulements à très petits nombres de Reynolds. Si l'écoulement du fluide est crée par le mouvement de parois solides, lorsqu'on inverse le mouvement des parois, les particules de fluide reprennent exactement les mêmes trajectoires, mais en sens inverse. Cette réversibilité peut également être comprise comme une diffusion "instantanée" de la quantité de mouvement à travers tout l'écoulement : la présence de parois solides influence l'écoulement par la condition de non glissement sur les parois. Lorsque les effets visqueux sont totalement prépondérants, c'est la diffusion de la quantité de mouvement par la viscosité qui "véhicule" cette information.

La réversibilité cinématique peut être mise en évidence par l'expérience illustrée en Fig. 6.1. On place un fluide très visqueux dans une cellule de Couette et on injecte localement dans le fluide du colorant dilué dans le même fluide très visqueux de façon à former un dessin dans le liquide. Puis, un des deux cylindres est mis en mouvement et on lui fait effectuer une rotation de plusieurs tours. Le dessin coloré est évidemment complètement distordu par le cisaillement. Ensuite, on inverse le sens de rotation du cylindre et on lui fait effectuer exactement le même nombre de tours qu'à l'aller. Comme par enchantement, le dessin coloré se reconstitue exactement au même endroit qu'à au départ du mouvement. La seule transformation irréversible subie par le colorant est une légère diffusion due à l'agitation moléculaire.

En l'absence d'inertie, les lignes de courant peuvent être parcourues dans un sens ou dans l'autre. Si \mathbf{u} est solution de l'équation de Stokes, alors $-\mathbf{u}$ l'est aussi. Ce n'est plus le cas dès l'instant

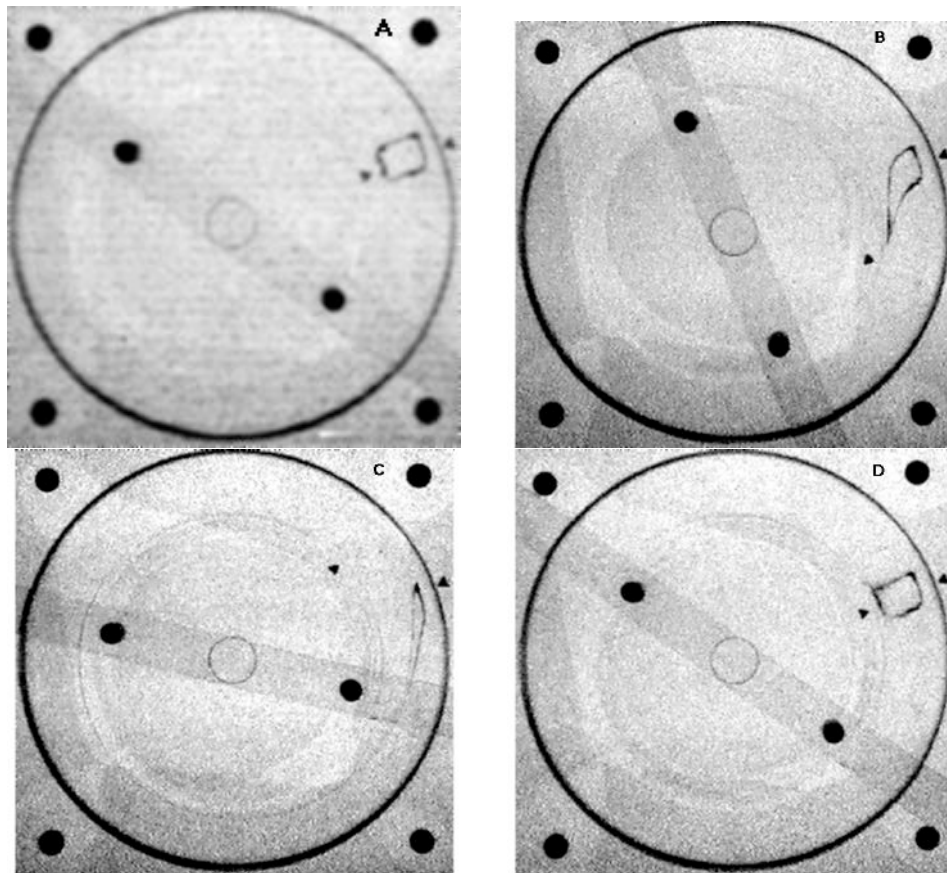


FIGURE 6.1 – Réversibilité de l'écoulement de Couette (vue de dessus). Au départ (en haut à gauche), on dessine un carré avec du colorant entre les deux cylindres. La position des cylindres est repérée par deux petits triangles. La rotation du cylindre intérieur déforme complètement le carré (en haut, à droite : $\theta = 20^\circ$, en bas à gauche, $\theta = 345^\circ$). Ensuite, on ramène le cylindre intérieur à son point de départ (en bas, à droite) ; le carré coloré se reconstitue. Il est seulement légèrement déformé par la diffusion.

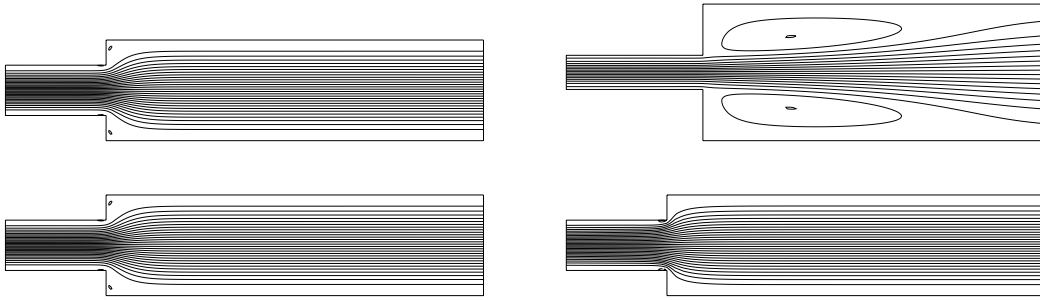


FIGURE 6.2 – Écoulement dans un convergent (ou divergent) à $Re = 0$ (à gauche) et $Re = 50$ (à droite). Sur les figures du haut l’écoulement va de gauche à droite, sur les figures du bas, de droite à gauche. Lignes de courant déterminées par résolution numérique de l’équation de Navier-Stokes.

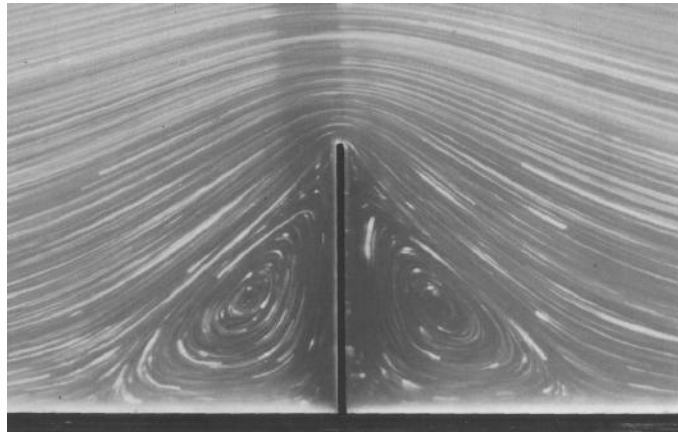


FIGURE 6.3 – Écoulement à très petit nombre de Reynolds autour d’une barrière perpendiculaire à l’écoulement. Photographie tirée de S. Taneda, *J. Phys. Soc. Jpn.* **46**, 1935 (1979).

où l’inertie du fluide joue un rôle. Sur la Fig. 6.2 nous voyons les lignes de courant dans un élargissement brusque (ou rétrécissement brusque selon la direction de l’écoulement). A $Re = 0$, les lignes de courant sont les mêmes pour les deux sens d’écoulement. En revanche, à $Re = 50$, l’écoulement dans le divergent forme un “jet” au centre de la partie large. Ce jet n’est pas visible si l’écoulement est convergent : souffler ou aspirer dans un entonnoir ne produit le même écoulement que si Re est très petit.

La réversibilité a également une conséquence sur la symétrie des lignes de courant. Considérons l’écoulement autour d’un obstacle possédant un plan de symétrie (par exemple, le plan $x = 0$). Si $u(x, y, z)$ est solution de l’équation de Stokes, alors $-u$ est également solution. En renversant l’écoulement, la face amont est devenue la face aval et vice versa et comme l’obstacle est symétrique, on doit obtenir les mêmes lignes de courant que dans la configuration initiale, ce qui implique que : $u(x, y, z) \rightarrow -u(-x, y, z) = -u(x, y, z)$. On peut observer cette symétrie sur l’écoulement autour d’une barrière placée perpendiculairement à la direction de l’écoulement (Fig. 6.3).

Enfin, la réversibilité cinématique a des conséquences fondamentales sur les modes de propulsion animale. Les organismes de très petite taille comme les bactéries et les spermatozoïdes vivent dans un monde où l’inertie est négligeable devant la viscosité. L’évolution a donc conduit à des modes de propulsion utilisant des cils ou des flagelles (fig. 6.4) qui sont radicalement différents des modes

de propulsion des organismes plus grands qui tirent partie de l'inertie du fluide¹.

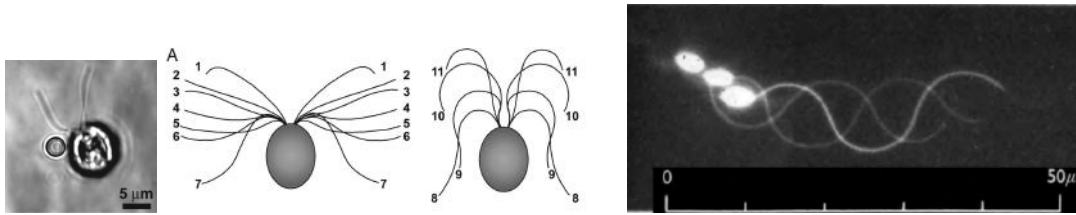


FIGURE 6.4 – Deux microorganismes nageant à petit Reynolds. À gauche, une algue verte *Chlamydomonas* qui possède deux flagelles dont on montre la cinématique. À droite, un spermatozoïde qui se propulse grâce à une onde propagative sur un flagelle unique.

6.1.3 Additivité des solutions

Une autre conséquence de la linéarité de l'équation de Stokes est la possibilité d'additionner simplement des solutions pour former une autre solution. Par exemple, considérons l'écoulement bidimensionnel dans un canal (Fig. 6.5). Si les deux parois sont fixes, la solution est un profil de vitesse parabolique avec une courbure du profil proportionnelle au gradient de pression (écoulement de Poiseuille). En revanche, si une des parois est mobile et s'il n'y a pas de gradient de pression, la solution est un écoulement avec un profil de vitesse linéaire (écoulement de Couette). L'addition des deux solutions (addition des champs de vitesse et addition des gradients de pression) est également une solution de l'équation de Stokes. Elle correspond à la présence d'un gradient de pression dans le canal et à un mouvement d'une des parois.

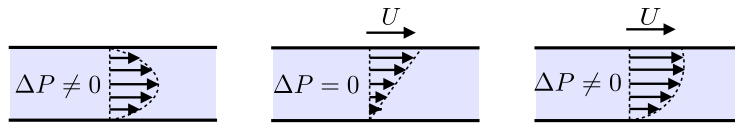


FIGURE 6.5 – additivité des solutions de l'équation de Stokes pour l'écoulement dans un canal.

6.2 Ecoulement autour d'une sphère. Suspensions

Une application importante de l'équation de Stokes concerne les fluides contenant de petites particules solides (suspensions) ou des gouttelettes (émulsions). Le transport de sédiments fluviaux et marins, la flottation des minerais, l'écoulement de pâtes de céramiques, les solutions diluées de polymères sont, entre autres, décrits par la physique des suspensions. Si les dimensions des particules ou gouttelettes sont assez petites, l'écoulement sera décrit (au moins localement) par l'équation de Stokes. La première approche des écoulements de suspensions consiste à examiner le cas simplifiée de l'écoulement autour d'une sphère solide.

6.2.1 Ecoulement autour d'une sphère solide

Commençons par déterminer l'ordre de grandeur de la force de traînée \mathbf{T} sur une sphère à petit nombre de Reynolds. \mathbf{T} est l'intégrale des contraintes sur la surface de la sphère. D'après l'équation de Stokes, l'ordre de grandeur de la pression et des contraintes de cisaillement est : $\eta U/a$, U étant la vitesse de déplacement de la sphère. Le rayon de la sphère a est en effet la seule longueur caractéristique du problème et : $\Delta u \approx U/a^2$ et $\nabla p \approx p/a$. En intégrant la contrainte sur la surface

1. E.M. Purcell, "Life at low Reynolds number", *Am. J. Phys.* **45**, 3 (1977)

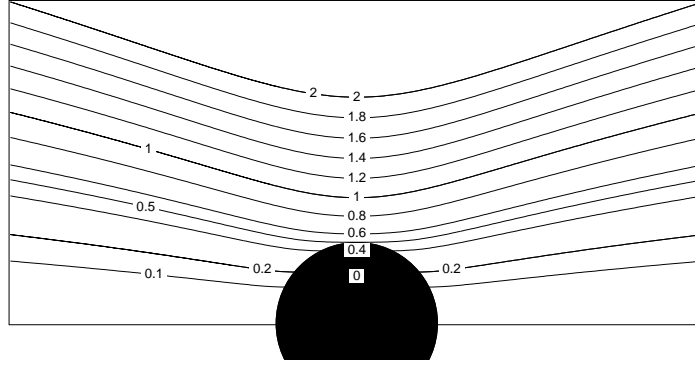


FIGURE 6.6 – écoulement à petit Re autour d'une sphère. Lignes de courant dans le repère où le fluide est immobile à l'infini. Les valeurs de ψ sont normalisées par Ua^2 .

totale de la sphère, on obtient : $T \approx a^2\eta U/a = \eta aU$.

Dans ces conditions, la vitesse de sédimentation est telle que la force de traînée T équilibre le poids apparent de la sphère : $P = 4/3\pi a^3\delta\rho g$ où $\delta\rho$ est la différence de masse volumique entre la sphère et le fluide. La vitesse de sédimentation U_{sed} est donc donnée par :

$$U_{sed} \approx \frac{P}{\eta a} \approx \frac{\delta\rho g a^2}{\eta} \quad (6.4)$$

Ce raisonnement simple nous montre que la vitesse de sédimentation varie comme le carré du rayon de la particule.

Pour déterminer exactement la force de traînée, il faut calculer complètement le champ de vitesse autour de la sphère. La résolution complète de l'équation de Stokes est un peu longue et nous allons simplement donner les résultats du calcul. Dans le référentiel où la sphère est en mouvement à une vitesse U et le fluide à l'infini immobile, le champ de vitesse est donné par :

$$u_r = U \cos \phi \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) \text{ et } u_\phi = -U \sin \phi \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \quad (6.5)$$

où r et ϕ sont les coordonnées polaires définies par le centre de la sphère et l'axe x suivant lequel la sphère se déplace. Les lignes de courant correspondant au champ de vitesse donné par (6.5) sont représentées sur la figure 6.6. Elles correspondent à une fonction de courant :

$$\psi = Ur^2 \sin^2 \phi \left(\frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right)$$

Pour obtenir le champ de vitesse dans le repère où la sphère est immobile, il suffit d'ajouter $-U$ partout à la vitesse, ce qui correspond à ajouter $-1/2Ur^2 \sin^2 \phi$ à la fonction de courant. Les lignes de courant correspondantes sont représentées sur la Fig. 6.7. Il faut noter que la perturbation engendrée par la sphère décroît très lentement (en $1/r$). En revanche, dans un écoulement à nombre de Reynolds élevé, le sillage d'un objet en mouvement s'atténue très rapidement (dans la direction normale à l'écoulement). Cette lente décroissance de la perturbation à $Re \ll 1$ fait que dans une suspension les particules interagissent fortement entre elles dès l'instant où la concentration dépasse quelques % en volume. Ce sont des interactions hydrodynamiques dues au mouvement du fluide entre les particules et qui se rajoutent aux autres interactions (électrostatiques par exemple). À partir du champ de vitesse (6.5) on calcule les contraintes à la surface de la sphère et on obtient la formule de Stokes pour la force de traînée :

$$T = 6\pi\eta aU \quad (6.6)$$

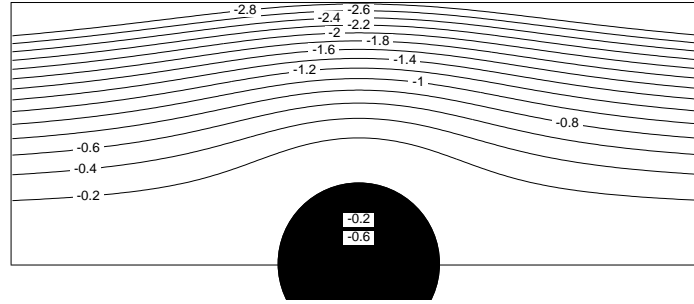


FIGURE 6.7 – Écoulement à petit Re autour d'une sphère. Lignes de courant dans le référentiel où la sphère est immobile.

La valeur exacte de la vitesse de sédimentation est donc :

$$U_{sed} = \frac{2}{9} \frac{\delta \rho g a^2}{\eta} \quad (6.7)$$

6.2.2 Écoulement autour d'une sphère fluide

Un calcul similaire à celui effectué pour une sphère solide peut être fait pour une goutte ou une bulle, à condition que les interfaces se déforment peu. Il faut remplacer la condition de non glissement à la surface de la sphère par la continuité des vitesses et des contraintes. Si la viscosité du fluide à l'intérieur de la sphère est $\lambda\eta$, la force de trainée est :

$$\mathbf{F} = -2\pi\eta a \mathbf{U} \frac{3\lambda + 2}{\lambda + 1}. \quad (6.8)$$

Dans la limite $\lambda \gg 1$ qui correspond à une sphère solide, on retrouve la formule de Stokes avec le préfacteur 6π . En revanche, si la viscosité du fluide interne est beaucoup plus petite que celle du fluide externe (cas d'une bulle de gaz dans un liquide), $\lambda \rightarrow 0$ et le préfacteur est 4π .

6.2.3 Force sur un objet très allongé

La détermination de la force exercée sur un objet très allongé est essentielle pour comprendre les modes de propulsion par cils et flagelles des microorganismes. Dans le cas d'un objet cylindrique de grand rapport d'aspect (longueur L très grande devant le rayon a) la force de trainée F_n pour un déplacement perpendiculaire à l'axe et F_t pour un déplacement parallèle à l'axe sont :

$$F_n = \frac{4\pi\eta L V_n}{\ln(L/a) + 0.5} \quad \text{et} \quad F_t = \frac{2\pi\eta L V_t}{\ln(L/a) - 0.5} \quad (6.9)$$

où V_n et V_t sont les composantes de vitesse normale et parallèle à l'axe.

Pour les très grands allongements $\ln(L/a) \gg 1$, la résistance au déplacement orthogonal à l'axe est deux fois plus grande que la résistance au déplacement longitudinal. Cette anisotropie des résistances implique que la force de trainée n'est pas colinéaire à la vitesse lorsque l'axe du bâtonnet est incliné par rapport à la direction de déplacement (Fig. 6.8).

6.3 Principe de la lubrification

Une des situations importantes dans laquelle l'inertie du fluide peut être négligée concerne les écoulements dits de lubrification. Ce terme recouvre en particulier les écoulements de fluides

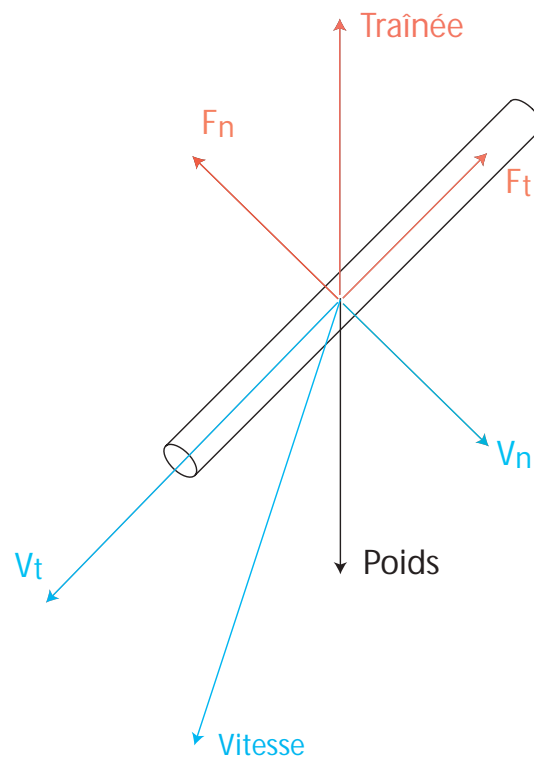


FIGURE 6.8 – Décomposition des composantes de vitesse et de force sur un objet allongé qui sédimente à petit nombre de Reynolds. Le poids est équilibré par la force de traînée qui se décompose suivant l'axe de l'objet et sa normale en F_t et F_n .

visqueux confinés entre deux parois solides très proches en mouvement relatif, mais les approximations associées s'étendent plus généralement aux couches minces de fluides.

Considérons deux parois qui délimitent un espace de très grand rapport d'aspect : l'épaisseur moyenne $\langle h \rangle$ est très petite devant la longueur L . De plus, si l'épaisseur h varie d'un point à un autre de l'écoulement, nous nous restreignons au cas où cette variation est très lente, c'est-à-dire : $dh/dx \ll 1$.

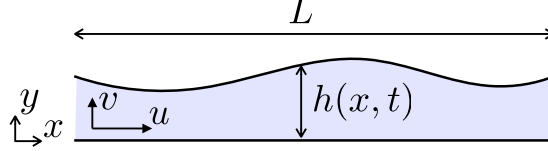


FIGURE 6.9 – Géométrie typique d'un écoulement de lubrification.

Cette géométrie particulière a deux conséquences :

i) la composante longitudinale de vitesse u est beaucoup plus grande que la composante transverse v . En effet, la conservation de la masse impose :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{u}{L} + \frac{v}{h} = 0 \quad (6.10)$$

d'où :

$$u \approx v \frac{L}{h} \gg v \quad (6.11)$$

ii) la force qui s'exerce sur les parois est beaucoup plus grande dans la direction normale à l'écoulement que dans la direction parallèle à l'écoulement. La force normale F_n (par unité de longueur dans la troisième direction z) est l'intégrale de la pression sur une des parois solides : $F_n = \int_0^L (p - p_0) dx \approx (p - p_0)L$. Toujours en tenant compte du rapport d'aspect $L/h \gg 1$, il est possible de déterminer un ordre de grandeur de la pression à partir de l'équation de Stokes :

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \approx \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \eta \frac{U}{h^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{p - p_0}{L} \quad (6.12)$$

d'où :

$$p - p_0 \approx \eta \frac{UL}{h^2} \text{ et } F_n \approx \eta \frac{UL^2}{h^2} \quad (6.13)$$

D'autre part la force F_t (toujours par unité de longueur dans la troisième direction z) dans la direction parallèle à l'écoulement est l'intégrale de la contrainte tangentielle sur la paroi solide :

$$F_t = \int_0^L \sigma_{xy} dx = \int_0^L \eta \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx \eta \frac{UL}{h} \quad (6.14)$$

d'où :

$$F_t = F_n \frac{h}{L} \ll 1 \quad (6.15)$$

Le rapport des deux composantes de force est égal au rapport des dimensions caractéristiques de l'écoulement. Ceci permet de supporter des charges importantes tout en conservant la possibilité d'un mouvement relatif avec une résistance faible. C'est le principe utilisé dans la lubrification des pièces mécaniques en rotation, dans les articulations entre les os, dans la sustentation des têtes de lecture de disques magnétiques ...

Notons que les approximations faites ci-dessus peuvent aussi s'appliquer au cas d'une couche mince de liquide confinée entre une surface solide et une surface libre (c'est le cas de l'étalement d'un liquide par centrifugation, spin coating) ou bien d'une couche mince confinée entre deux surfaces libres (films de savon, nappes liquides). L'approximation est également valide si la couche mince de liquide a une courbure globale, pourvu que le rayon de courbure soit grand par rapport à l'épaisseur de la couche (pensons par exemple à un film de liquide ruisselant sur un cylindre ou une sphère).

6.4 Comment résoudre un problème de lubrification ?

6.4.1 Fluide confiné entre deux parois solides

Nous prenons ici l'exemple d'un écoulement entre deux parois solides, l'une plane placée en $y = 0$ et l'autre définie par $y = h(x)$, avec $0 \leq x \leq L$. On se place dans le repère où la surface supérieure est immobile, la surface plane se déplaçant horizontalement à la vitesse U (Fig. 6.9). Avec les approximations énoncées ci-dessus, l'équation de Stokes se réduit à :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

En supposant que u varie très lentement avec x , on intègre deux fois la première équation par rapport à y , pour obtenir :

$$u = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + Ay + B.$$

La condition $u_{y=0} = U$, donne $B = U$ et la condition $u_{y=h} = 0$ donne

$$A = -\frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{h}$$

d'où le profil de vitesse :

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + U \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Le débit de fluide Q (par unité de longueur dans la troisième dimension) est obtenu par intégration sur l'épaisseur $h(x)$:

$$Q = \int_0^h u \, dy = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2}.$$

Le fluide étant incompressible, le débit Q est ici indépendant de x et on peut exprimer le gradient de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta Q}{h^3} + \frac{6\eta U}{h^2}.$$

La variation de l'épaisseur h avec x étant donnée, on peut intégrer cette dernière équation. Les conditions aux limites pour la pression en $x = 0$ et $x = L$ étant fixées, on détermine la distribution de pression et le débit Q .

Enfin, pour calculer les forces exercées sur les parois solides, on intègre d'une part les contraintes normales :

$$F_y = \int_0^L p(x) dx$$

et d'autre part les contraintes tangentielles :

$$F_x = \int_0^L \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dx = - \int_0^L \left[\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta U}{h} \right] dx$$

6.4.2 Fluide confiné entre un solide et une interface fluide ou entre deux interfaces fluides

Si la couche de fluide est délimitée par des interfaces avec d'autres fluides non miscibles, les conditions aux limites qui s'appliquent sont maintenant la continuité des vitesses et des contraintes de part et d'autre de l'interface. En particulier, si l'interface est courbée, il faut tenir compte de la pression de Laplace dans la continuité des contraintes normales.

6.5 Ecoulement dans un milieu poreux

6.5.1 Loi de Darcy

Les écoulements dans les milieux poreux sont a priori très difficiles à modéliser compte tenu de l'extrême complexité de la géométrie de ces milieux. Néanmoins, il est possible d'établir une relation simple entre la vitesse moyenne du fluide \bar{u} et le gradient de pression moyen $\nabla\bar{p}$.

Dans chacun des pores qui constitue l'espace occupé par le fluide, l'écoulement est similaire à un écoulement de Poiseuille, même si la géométrie du pore est plus complexe que celle d'un tube de section circulaire. Le point essentiel est que de la vitesse moyenne u dans chacun des pores est proportionnelle au gradient de pression local $\nabla p : u \propto (1/\eta)d^2\nabla p$ où d est une longueur représentative du diamètre des pores. Si nous regardons maintenant l'écoulement à une échelle beaucoup plus grande que celle des pores, mais qui peut être nettement plus petite que les dimensions totales du milieu poreux, nous pouvons définir une vitesse moyenne \bar{u} et un gradient de pression moyen $\nabla\bar{p}$. Ces deux quantités sont obtenues par intégration de u et ∇p sur une longueur assez grande pour que les fluctuations dues à la variabilité des pores disparaissent. L'intégration conserve la linéarité de la relation entre u et ∇p et l'équation qui en résulte est la loi de Darcy :

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{k}{\eta}\nabla\bar{p} \quad (6.16)$$

où k est un paramètre qui caractérise le milieu poreux et qui a la dimension du carré d'une longueur ; c'est la *perméabilité* du milieu poreux. Notons que la loi de Darcy, écrite sous la forme suivante :

$$\eta\frac{\bar{\mathbf{u}}}{k} = -\nabla\bar{p} \quad (6.17)$$

est analogue à l'équation de Stokes, le terme u/k remplaçant Δu . Pour une géométrie donnée (par exemple un empilement régulier de sphères), la perméabilité est proportionnelle au carré de la dimension des objets qui constituent le milieu poreux. Exemples de perméabilités :

- sable : $2 \cdot 10^{-7}$ à $2 \cdot 10^{-7} \text{cm}^2$
- grès : $5 \cdot 10^{-12}$ à $3 \cdot 10^{-8} \text{cm}^2$
- sols : $3 \cdot 10^{-9}$ à $1 \cdot 10^{-7} \text{cm}^2$
- cigarette : 10^{-5}cm^2

Pour les très faibles perméabilités, en particuliers les sols, on utilise une unité de perméabilité adaptée, le Darcy égal approximativement à $1 \mu\text{m}^2$.

Le champ de vitesse moyenné dérive d'un potentiel proportionnel à la pression moyennée. Cette propriété simple permet de résoudre assez aisément les problèmes d'écoulement dans les sols : la condition d'incompressibilité associée à la loi de Darcy implique que le champ de pression obéisse à l'équation de Laplace. Il suffit donc en principe de résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites appropriées.

Exemple d'application de la loi de Darcy : écoulement dans une digue en terre

Parfois une solution approchée peut être trouvée comme dans l'exemple du barrage en terre, expliqué ci-dessous. Un barrage en terre n'est pas totalement imperméable : l'eau s'infiltré dans la masse de la digue. Mais cette infiltration n'est pas catastrophique si l'eau ne ressort pas sur la face aval du barrage et n'érode pas la digue. L'eau infiltrée est recueillie par un drain placé au bas de la face aval de la digue (fig. 6.10).

Supposons que l'écoulement dans le barrage est suffisamment faible pour ne perturber que très peu la répartition de pression hydrostatique. Alors, dans chaque section x du barrage, la répartition de pression est : $p(x, z) = p_0 + \rho g(h(x) - z)$ où p_0 est la pression atmosphérique et $h(x)$ la hauteur d'eau à l'intérieur de la digue. Dans cette approximation, l'écoulement n'a qu'une seule composante de vitesse suivant l'axe x :

$$u_x = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k\rho g}{\eta}\frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.18)$$

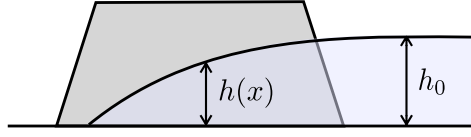


FIGURE 6.10 – Schéma d'une digue en terre

et le débit d'eau infiltrée est donné en intégrant u_x sur toute la hauteur h :

$$Q = \int_0^{h(x)} u_x dz = -\frac{k\rho g}{2\eta} \frac{\partial h^2}{\partial x} \quad (6.19)$$

La hauteur d'eau est donc telle que :

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2\eta Q}{k\rho g} x \quad (6.20)$$

où h_0 est la hauteur d'eau dans le réservoir. La longueur minimale du barrage pour que l'eau infiltrée ne sorte pas sur la face aval est donc donnée par :

$$L = \frac{k\rho g h_0^2}{2\eta Q} \quad (6.21)$$

Si le drain (où règne la pression p_0 , ce qui implique $h(l) = 0$) est placé à une distance l de la face amont de la digue, le débit d'eau infiltrée est fixé par (6.20) :

$$Q = \frac{k\rho g h_0^2}{2\eta l} \quad (6.22)$$

On pourrait retrouver le résultat ci-dessus par un raisonnement dimensionnel : l'ordre de grandeur du gradient de pression à travers la digue est : $\nabla p \approx \frac{\rho g h_0}{l}$. La vitesse moyenne est donnée par la loi de Darcy : $u = \frac{k}{\eta} \nabla p$ et le débit est de l'ordre de $Q \approx u h_0$. Les résultats énoncés ci-dessus ne sont valides que si le champ de vitesse reste approximativement unidimensionnel, c'est-à-dire si dh/dx reste petit devant 1. En effet, la surface libre étant à pression constante il s'agit d'une ligne de courant. La surface inférieure de la digue ($z = 0$) est également une ligne de courant. La ligne de courant la plus inclinée sur l'horizontale est la surface libre et le rapport u_y/u_x est donné par la pente de la surface libre dh/dx .

6.5.2 Modèle de tubes tortueux

Si l'on met à part quelques configurations simples comme l'empilement périodique de sphères, il est impossible de prédire exactement la perméabilité d'un milieu poreux, même si sa géométrie est parfaitement connue. Il faut avoir recours à la détermination expérimentale ou à des modèles approximatifs pour connaître k . Un de ces modèles consiste à remplacer le milieu poreux réel par un ensemble de canaux tortueux de section circulaire. Si L est la longueur du milieu poreux dans la direction moyenne de l'écoulement, la longueur effective de chaque tube est : $L' = TL$ où T est la tortuosité du chemin emprunté par le fluide. Dans un milieu à très faible porosité, T peut être nettement plus grand que 1. Le gradient de pression effectif dans chaque tube est $\Delta p/L' = \Delta p/TL$ où Δp est la différence de pression entre les deux extrémités du poreux. Nous appliquons la loi de Poiseuille qui donne le débit dans chaque tube de diamètre d :

$$q = \frac{\pi d^4}{128\eta} \frac{\Delta p}{TL} \quad (6.23)$$

Le débit total dans le milieu poreux est : $Q = Nq$ où N est le nombre total de tubes et la vitesse moyenne est : $\bar{u} = nq$ où n est le nombre de tubes par unité de surface (sur une coupe du poreux

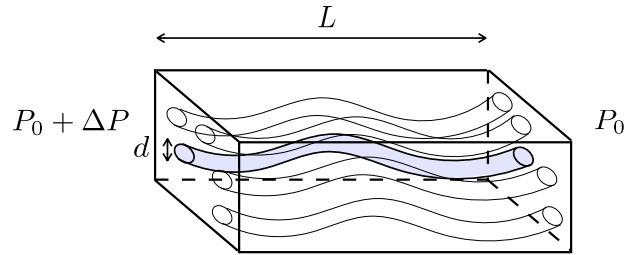


FIGURE 6.11 – Modèle de tubes tortueux pour un milieu poreux.

perpendiculairement à l'écoulement). Exprimons maintenant la perméabilité du milieu en fonction de sa porosité α , de sa surface spécifique σ et de la tortuosité. La porosité est la fraction de volume occupée par le fluide. La surface spécifique est l'aire de contact entre le fluide et le solide par unité de volume. Dans notre modèle de tubes : $\alpha = n\pi d^2/4$ et $\sigma = n\pi dT$, ce qui donne une perméabilité telle que :

$$k = \frac{\alpha^3}{2\sigma^2 T^2} \quad (6.24)$$

Ce résultat est connu sous le nom de relation de Cozeny-Karman. Il n'est pas restreint à un modèle de tubes et s'applique à un certain nombre de milieux poreux. Mais il est souvent incorrect pour des distributions de particules (ou de pores) très larges, pour des particules non sphériques. Il existe évidemment d'autres modèles plus sophistiqués qui rendent compte plus précisément des perméabilités mesurées.

6.5.3 Ecoulements multiphasiques

Nous avons parlé jusqu'à présent d'écoulements monophasiques dans les milieux poreux (au sens où il y a une seule phase fluide). Mais en hydrologie et en génie pétrolier, on est toujours confronté à des écoulements multiphasiques (eau-air ou huile-eau). La présence d'interfaces fluides ajoute encore à la complexité du problème. Mentionnons simplement que la répartition de pression est considérablement modifiée par la pression capillaire : $p_c \approx \gamma/d$, où γ est la tension interfaciale, et que la forme globale (à une échelle plus grande que le pore) de l'interface entre les deux phases peut être différente selon les conditions de déplacement des fluides.

Chapitre 7

Couches limites

7.1 Notion de couche limite

Nous avons déjà examiné des écoulements où les effets visqueux sont entièrement dominants et nous allons ensuite étudier les écoulements à grand nombre de Reynolds où les effets visqueux sont a priori négligeables. Cependant, certains résultats expérimentaux, comme en particulier l'existence d'une force de traînée, ne peuvent s'interpréter si on néglige totalement la viscosité. Dans les écoulements à grand Re , il est nécessaire de tenir compte de l'existence de *couches limites* dans lesquelles les effets visqueux sont confinés et en dehors desquelles les effets visqueux sont négligeables.

Considérons par exemple une plaque "infinie" immergée dans un fluide. Initialement au repos, elle est mise brusquement en mouvement parallèlement à elle-même. Sur quelle hauteur le fluide "se rend-il compte" que la plaque bouge ? Dans cette configuration, nous pouvons considérer que l'écoulement est unidimensionnel : $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$ et que la vitesse ne dépend que de la coordonnée transverse y , normale à la plaque plane, et du temps. L'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (7.1)$$

l'équation pour la vorticité ω_z ayant exactement la même forme.

Les conditions initiales sont : $u_x = 0$ partout à $t = 0$ et les conditions aux limites sont $u_x(y = 0, t) = U$ pour $t > 0$. Avec ces conditions, la solution de l'équation 7.1 est :

$$u_x = U \left[1 - \operatorname{erf}(y/2\sqrt{\nu t}) \right]. \quad (7.2)$$

Les profils de vitesse autosimilaires correspondants sont représentés sur la Fig. 7.1.

La vorticité associée varie comme $\exp(-y^2/4\nu t)$. Ainsi, la vorticité cr e e par la brusque mise en mouvement de la plaque a diffusée sur une couche d'épaisseur $\delta(t) = \sqrt{\nu t}$. En revanche, à l'extérieur de couche limite, la vorticité n'a pas eu le temps de diffuser et l'écoulement demeure irrotationnel.

Dans cet exemple de la plaque infinie, il y a une invariance par rapport à la coordonnée x le long de la plaque. De ce fait, le transport de quantité de mouvement par l'écoulement moyen, parallèle à la plaque, n'a aucun effet, la quantité transportée ayant la même valeur à toutes les abscisses x . Il n'en est pas de même dans un cas plus général (par exemple, si la plaque plane est de longueur finie) où la convection par l'écoulement moyen va participer au transport de la quantité de mouvement.

Considérons le cas d'une plaque plane de très faible épaisseur et de longueur l placée dans un écoulement uniforme de vitesse U parallèle à la plaque (Fig. 7.2). La viscosité impose le

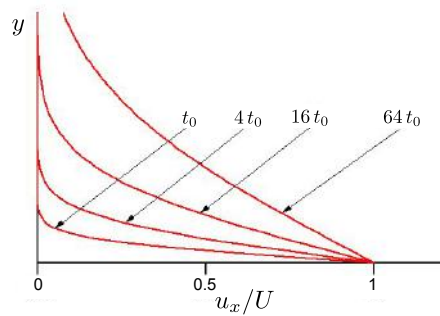


FIGURE 7.1 – Entraînement d'un fluide visqueux par une plaque plane mise brusquement en mouvement. Profils de vitesse à des temps en progression géométrique. Si t est multiplié par 4, l'épaisseur de couche limite est multipliée par 2.

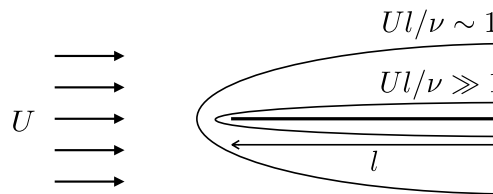


FIGURE 7.2 – Couche limite autour d'une plaque plane de longueur l , dans le cas où Ul/ν est d'ordre unité et dans le cas où Ul/ν est très grand.

développement autour de la plaque d'une couche où la vorticité est pas nulle. L'écoulement moyen s'oppose à l'extension de cette couche vers l'amont. En revanche, il favorise son développement vers l'aval. Contrairement au cas de la plaque infinie, nous pouvons atteindre ici un état stationnaire pour le transport de la vorticité et de la quantité de mouvement. Cet  tat stationnaire va définir l'épaisseur de la couche limite (cf. calculs §7.2). Le temps moyen mis par un élément de fluide pour parcourir la totalité de la plaque est l/U . Pendant ce temps, la viscosité permet à la quantité de mouvement de diffuser sur une distance $\delta = (\nu l/U)^{1/2} = lRe^{-1/2}$, si nous calculons le nombre de Reynolds sur la longueur de la plaque. Si le nombre de Reynolds ainsi calculé est suffisamment grand, l'épaisseur δ sera petite devant la longueur l de la plaque. En dehors de la couche limite, l'écoulement reste irrotationnel et les effets visqueux sont négligeables. Ce raisonnement s'applique à tout corps solide placé dans un écoulement, à condition que la couche limite reste effectivement confinée près du corps; nous verrons plus tard quelles sont les conditions qui conduisent au décollement de la couche limite.

Ceci justifie l'utilisation de l'hypothèse de fluide parfait pour décrire l'écoulement autour d'un corps solide (en dehors de la couche limite) ainsi que la recherche de solutions qui dérivent d'un potentiel ( coulements irrotationnels).

7.1.1 Approximations de l'équation de Navier-Stokes dans une couche limite.

Le fait que l'épaisseur de la couche limite soit petite devant les autres dimensions caractéristiques de l'écoulement permet de faire des approximations dans l'équation de Navier-Stokes. Pour simplifier, considérons toujours le cas d'une plaque plane (placée en $y = 0$) soumise à un écoulement uniforme à l'infini ($u = U, v = 0$) et supposons que l'écoulement est bidimensionnel.

La faible épaisseur de la couche limite implique que les dérivées de la vitesse dans la direction

y (normale à la plaque) sont beaucoup plus grandes que les dérivées dans la direction x :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gg \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \text{ et } \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \quad (7.3)$$

Ces inégalités permettent de simplifier l'écriture de l'équation de Navier-Stokes pour la composante u de la vitesse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.4)$$

Par ailleurs, la composante de vitesse v , normale à la plaque est petite devant u , ainsi que le montre la relation d'incompressibilité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{u}{l} + \frac{v}{\delta} = 0 \quad (7.5)$$

Nous pouvons noter que l'équation (7.4) est identique à l'équation d'Euler pour les fluides parfaits à un terme près qui est proportionnel à la viscosité et qui rend compte de la diffusion de la vorticité. Les considérations générales développées ci-dessus suggèrent que ce terme de viscosité est comparable aux termes inertiels de (7.4)   l'intérieur de la couche limite, soit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.6)$$

soit, en loi d'échelle : $U \frac{U}{l} \approx \nu \frac{U}{\delta^2}$, qui conduit à :

$$\delta^2 \approx l^2 \frac{\nu U}{l} \text{ soit } : \delta \approx l Re^{-1/2} \quad (7.7)$$

où le nombre de Reynolds est défini avec la longueur de la plaque. Une des conséquences de (7.7) est que la composante v a pour ordre de grandeur : $U Re^{-1/2}$ et que la projection suivant y de l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (7.8)$$

tous les termes proportionnels à v étant petits. La pression est donc pratiquement constante à travers la couche limite et elle est déterminée par la résolution de l'équation d'Euler en dehors de la couche limite. Lorsque l'écoulement est stationnaire, l'équation d'Euler est équivalente à la relation de Bernoulli que nous verrons au chapitre suivant. Il est donc possible de résoudre (7.4) en utilisant les conditions aux limites suivantes : sur la plaque plane ($y = 0$) : $u = v = 0$; sur l'extérieur de la couche ($y/\delta \rightarrow \infty$) : $u(x, y, t) \rightarrow U(x, t)$ et $v \rightarrow 0$, la pression étant donnée par l'équation de Bernoulli $p + 1/2 \rho U^2 = C^{te}$.

Le raisonnement que nous venons de faire pour une plaque plane peut être généralisé à d'autres géométries. Nous pouvons décrire de la même manière la couche limite sur une paroi courbe. Il suffit de définir un système de coordonnées curvilignes suivant le contour de la paroi solide. Il faudra également tenir compte du gradient de pression radial imposé par la courbure des lignes de courant. Nous pouvons également utiliser des approximations de couche limite pour décrire la zone de transition entre deux écoulements parallèles de vitesses différentes (couche de mélange, Fig. 7.3) ou bien pour décrire un sillage laminaire. Les approximations essentielles reposent en effet sur la grande disparité des longueurs caractérisant l'écoulement dans deux directions orthogonales.

7.2 Couche limite sur une plaque plane : calcul de Blasius

En utilisant les approximations justifiées ci-dessus, nous allons déterminer le champ de vitesse dans la couche limite se développant sur une plaque plane (Fig. 7.4). Nous avons à résoudre

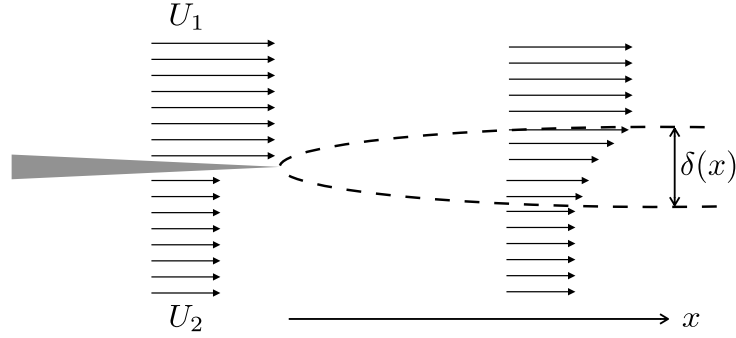


FIGURE 7.3 – Couche de mélange se développant entre deux écoulements uniformes de vitesses U_1 et U_2 .

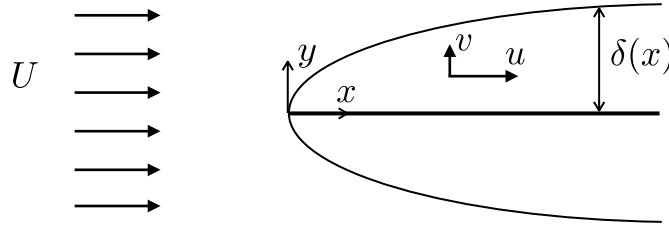


FIGURE 7.4 – Couche limite sur une plaque plane, avec comme conditions aux limites $u = v = 0$ en $y = 0$ et $u \rightarrow U$ si $y/\delta \rightarrow \infty$ lorsque $l > x > 0$ et $u = U$ en $x = 0$, quel que soit y .

l'équation 7.4, couplée à la condition d'incompressibilité (7.5) avec les conditions aux limites suivantes : $u = v = 0$ en $y = 0$ et $u \rightarrow U$ si $y/\delta \rightarrow \infty$ lorsque $l > x > 0$ et $u = U$ en $x = 0$, quel que soit y .

Il est clair que l'épaisseur de la couche limite augmente lorsqu'on se déplace dans le sens de l'écoulement moyen. Chaque portion de la paroi solide contribue en effet à ralentir l'écoulement par le biais du frottement visqueux. À une distance x du bord d'attaque de la plaque, seules les parties de la plaque situées en amont de ce point ont contribué à l'épaississement de la couche limite. Nous pouvons donc supposer que l'épaisseur locale de la couche ne dépend que de la coordonnée x et non de la longueur totale de la plaque. Sachant qu'un élément de fluide parcourt la distance x en un temps de l'ordre de x/U et que la distance sur laquelle diffuse la quantité de mouvement est de l'ordre de $\sqrt{\nu t}$, l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(x)$ doit être de l'ordre de $\sqrt{\nu x/U}$. Tout le raisonnement qui suit repose sur le fait que l'épaisseur de couche limite ne dépend que la distance au bord d'attaque et que ce qui se passe en aval n'influence pas la couche limite. Avant de chercher des solutions des équations (7.4) et (7.5), nous allons les écrire avec des variables sans dimension (avec des primes). Nous normalisons naturellement la vitesse u le long de la plaque par la vitesse à l'infini U :

$$u = u'U \quad (7.9)$$

Reprenons maintenant la condition d'incompressibilité et écrivons l'ordre de grandeur des différents termes avec les grandeurs locales X et $\delta(X)$ où X est la distance depuis le bord d'attaque de la plaque :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{U}{X} + \frac{V}{\delta(X)} \quad (7.10)$$

ce qui nous conduit à :

$$V \approx U \frac{\delta(X)}{X} \quad (7.11)$$

et nous normalisons la vitesse v par cette grandeur V :

$$v = v'V = v'U/\sqrt{Re_X} \quad (7.12)$$

où Re_X est un nombre de Reynolds défini sur la longueur X : $Re_X = UX/\nu$. L'échelle de longueur suivant y est naturellement l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(X)$ et l'échelle de longueur suivant x est la distance X :

$$x = x'X \text{ et } y = y'\delta(X) \quad (7.13)$$

Reportons dans (7.4) les variables sans dimension définies par (7.9), (7.12) et (7.13) et remarquons qu'à l'extérieur de la couche limite la vitesse est constante et donc, la pression est également constante. Nous obtenons :

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (7.14)$$

Cette forme de l'équation de couche limite montre que les termes inertiels (membre de gauche) sont bien du même ordre de grandeur que les termes de viscosité (membre de droite). En effet, les variables adimensionnelles sont toutes choisies de manière à être d'ordre unité. On peut également remarquer que la viscosité du fluide et le nombre de Reynolds n'apparaissent plus directement dans cette équation. Ceci résulte du choix de l'épaisseur locale de la couche limite : $\delta(X) = XRe_X^{-1/2}$ qui décrit l'essentiel du phénomène physique conduisant à la formation de la couche limite. De la même manière que dans le problème de la plaque infinie mise brusquement en mouvement, nous allons trouver des solutions autosimilaires pour le profil de vitesse en prenant une coordonnée spatiale sans dimension : $\zeta = y/\delta(x) = y\sqrt{U/\nu x}$ et en cherchant une solution pour u de la forme :

$$u = Uf(\zeta) \quad (7.15)$$

Pour satisfaire les conditions aux limites ($u(y=0) = 0$ et $u \rightarrow U$ si $y \rightarrow \infty$), il est nécessaire que : $f(0) = 0$ et : $f(\zeta) \rightarrow 1$ si $\zeta \rightarrow \infty$. En reportant l'expression (7.15) dans la condition d'incompressibilité, il vient :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \left(\frac{U}{\nu x}\right)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{U}{2x} \zeta f'(\zeta) \quad (7.16)$$

soit :

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U}{x}\right)^{1/2} \zeta f'(\zeta) \quad (7.17)$$

qu'il est possible d'intégrer par parties en :

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu U}{x}\right)^{1/2} \left[\zeta f(\zeta) - \int_0^\zeta f(\xi) d\xi \right] \quad (7.18)$$

en tenant compte de la condition $v(y=0) = 0$. Nous pouvons maintenant insérer les expressions (7.15) et (7.18) dans l'équation 7.4, avec $\partial p/\partial x = 0$ puisque la pression est constante à l'extérieur de la couche limite. Avec :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{U^2}{x} \zeta f f' \text{ et } : v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{U^2}{x} f' \left(\zeta f - \int f d\xi \right)$$

ainsi que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x} f''$$

il vient :

$$2f''(\zeta) + f'(\zeta) \int_0^\zeta f(\xi) d\xi = 0 \quad (7.19)$$

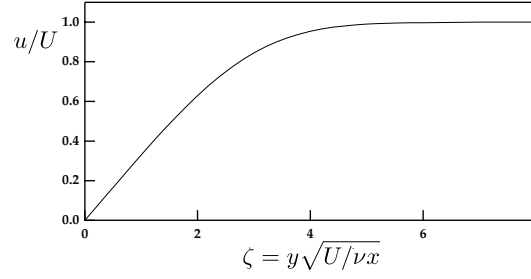


FIGURE 7.5 – profil de vitesse dans la couche limite sur une plaque plane.

qui est l'équation de Blasius décrivant le profil de vitesse. Remarquons la disparition explicite des coordonnées x et y dans cette dernière équation. Elles apparaissent seulement par l'intermédiaire de ζ qui est proportionnel à $yx^{-1/2}$. Ceci confirme que l'équation de couche limite admet bien des solutions autosimilaires (les profils de vitesses sont identiques à toutes les abscisses x). La solution de (7.19) a été obtenue numériquement. Il faut noter que lorsque ζ est inférieur à 2, le profil de vitesse est très proche d'une droite et que lorsque ζ atteint 5, f est supérieur à 0,99. La couche limite sur une plaque plane peut donc être représentée très schématiquement par un profil linéaire se raccordant à la valeur constante de la vitesse à l'extérieur de la couche limite (fig. 7.5). À partir du profil de vitesse, nous pouvons déterminer la force de friction exercée sur la plaque par l'écoulement. La contrainte de cisaillement sur la plaque est :

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \eta U f'(0) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (7.20)$$

soit, en faisant apparaître la pression dynamique ρU^2 et en prenant la valeur de $f'(0) = 0.33$ trouvée par le calcul :

$$\sigma_{xy} = 0,33 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2} \quad (7.21)$$

La force totale sur une plaque de longueur l (par unité de longueur dans la troisième dimension) est donc l'intégrale de la contrainte donnée par (7.21) :

$$F_l = 0,33 \rho U^2 \int_0^l \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2} dx = 0,66 \rho U^2 l \left(\frac{\nu}{Ul} \right)^{1/2} \quad (7.22)$$

Le coefficient de friction C_D est défini comme le rapport entre la force de traînée et la force qui serait exercée par la pression dynamique appliquée uniformément sur toute la plaque, soit :

$$C_D = \frac{F_l}{\rho U^2 l} = 0,66 Re_l^{-1/2} \quad (7.23)$$

L'expression du coefficient de friction trouvée ci-dessus dans le cas d'une plaque plane reste approximativement correcte sur des corps profilés, c'est-à-dire tant que la surface solide fait un angle faible avec la direction moyenne de l'écoulement (par exemple, dans le cas du profil d'aile de la Fig. 1.1 placé en incidence nulle). Les calculs développés ci-dessus cessent également d'être valables lorsque la couche limite devient turbulente, ce qui se produit lorsque le nombre de Reynolds construit sur l'épaisseur locale de la couche limite $U\delta/\nu$ excède à peu près 600. Nous avons jusqu'à présent défini l'épaisseur δ de la couche limite par un raisonnement purement dimensionnel. Il est maintenant possible d'en donner une définition plus précise. La définition la plus simple consiste à chercher la valeur de ζ pour laquelle u/U atteint une valeur donnée, par exemple 0,99. On trouve alors : $\delta = 5(\nu x/U)^{1/2}$. Une autre définition, plus physique, consiste à définir l'épaisseur de déplacement qui estime le déficit global de débit dû à la présence de la couche limite. En amont de la plaque, le débit de fluide entre les lignes $y = 0$ et $y = D$ est évidemment $Q_0 = UD$. A une distance x en aval du bord d'attaque, ce débit devient :

$$Q = \int_0^D u dy = Q_0 - \int_0^D (U - u) dy \approx Q_0 - U \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (7.24)$$

où nous avons utilisé le fait que D est beaucoup plus grand que l'épaisseur de la couche limite et, qu'en dehors de cette couche, u est égal à U . Nous pouvons écrire (7.24) sous la forme :

$$Q = Q_0 - U\delta_1 \quad (7.25)$$

définissant ainsi l'épaisseur de déplacement δ_1 . Cette épaisseur est également la distance dont sont déplacées verticalement les lignes de courant dans l'écoulement potentiel à l'extérieur de la couche limite. En effet, il faut assurer la conservation du débit Q_0 entre les lignes de courant qui, loin en amont, se situent respectivement en $y = 0$ et $y = D$. Sachant qu'à l'extérieur de la couche limite, la vitesse est uniforme et égale à U , pour compenser le déficit exprimé par (7.25), il faut déplacer la ligne de courant extérieure d'une distance δ_1 . Cet écartement progressif des lignes de courant extérieures est dû à la petite composante verticale de vitesse.

7.3 Couches limites en présence d'un gradient de pression extérieur. Décollement

7.3.1 Influence de l'accélération ou décélération de l'écoulement externe

La configuration de l'écoulement (par exemple la courbure de la paroi solide) peut imposer un gradient de vitesse $\partial U/\partial x$ non nul à l'extérieur de la couche limite. Nous pouvons, *en dehors de la couche limite*, utiliser la loi de Bernoulli $p + 1/2\rho U^2 = C$ parce que les effets visqueux y sont négligeables. L'application de la loi de Bernoulli nous dit alors que la pression varie également dans la direction de l'écoulement moyen. En utilisant la condition d'incompressibilité, nous pouvons obtenir la composante de vitesse verticale v en fonction du gradient de vitesse longitudinal :

$$v(y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (7.26)$$

Si $\partial u/\partial x$ est positif (le fluide accélère le long de la paroi), (7.26) nous indique que la composante verticale de vitesse sera négative. Pour satisfaire la condition d'incompressibilité, le fluide est ramené vers la paroi. L'accélération de l'écoulement hors de la couche limite contribue donc à amincir la couche limite. En revanche, s'il y a décélération de l'écoulement hors de la couche limite, (7.26) nous montre que v est positif, le fluide est emporté de la paroi vers l'écoulement extérieur. Cet effet se rajoute à l'épaississement de la couche limite provoqué par la diffusion de la quantité de mouvement due à la viscosité. À l'extérieur de la couche limite, le gradient de pression est :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (7.27)$$

La composante de vitesse v étant très petite, la pression à l'intérieur de la couche limite est très peu différente de la pression externe. Ainsi, la décélération de l'écoulement externe conduit à l'existence d'un gradient de pression adverse, qui s'oppose à l'écoulement dans la couche limite. Si ce gradient de pression est suffisamment fort, il peut renverser l'écoulement et provoquer le décollement de la couche limite.

Chapitre 8

Écoulements potentiels

À grand nombre de Reynolds, en dehors des couches limites, les effets visqueux sont négligeables. Si l'écoulement est initialement irrotationnel, il ne peut y avoir de création de vorticité et le champ de vitesse reste irrotationnel. Ces deux conditions ont des conséquences importantes sur les caractéristiques des écoulements et la distribution de pression.

8.1 Loi de Bernoulli

8.1.1  volution de l'énergie cinétique

De la même manière que pour le bilan de quantité de mouvement, nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse ρ , en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles. La variation temporelle de l'énergie cinétique est (il faut ici comprendre les indices i, j comme une somme sur les composantes i et j) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (8.1)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (8.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (8.2)$$

soit, en décomposant le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en une partie isotrope $-p\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ et son déviateur $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$, $\text{dev}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{\mathbf{I}}}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \frac{\partial u_i d_{ij}}{\partial x_j} - d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (8.3)$$

c'est-à-dire, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\mathbf{d}}}) - \underline{\underline{\mathbf{d}}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (8.4)$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (8.4) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\mathbf{u} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) - \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{\mathbf{d}}} \right] - \underline{\underline{\mathbf{d}}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \quad (8.5)$$

Récrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique E_c sous forme intégrale, en intégrant chacun des termes sur un volume Ω fixe dans le repère eulérien et en utilisant le théorème de la

divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} E_c dV \right) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\rho u^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} dV \quad (8.6)$$

La signification physique des différents termes de cette équation est :

- le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique convecté par l'écoulement à travers la surface $\partial\Omega$.
- le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la surface $\partial\Omega$.
- le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume.
- enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume Ω . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

8.1.2 Loi de Bernoulli en écoulement stationnaire

L'équation de conservation de l'énergie prend une forme particulièrement simple lorsqu'il est possible de négliger les effets de la viscosité et lorsque les forces en volume dérivent d'un potentiel φ , tel que : $\mathbf{f} = -\nabla\varphi$ (par exemple, $\varphi = gz$). En partant de l'équation (8.4) et en posant $\underline{\mathbf{d}} = 0$ (car les contraintes visqueuses sont négligeables), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi \right) \quad (8.7)$$

Lorsque l'écoulement est stationnaire, la dérivée eulérienne de l'énergie cinétique est nulle. Ce qui veut dire que le gradient de la quantité $H = \rho u^2/2 + p + \varphi$ est partout orthogonal au vecteur vitesse. Donc, si on se déplace en suivant une particule de fluide le long d'une ligne de courant, la quantité H , qui est l'équivalent d'une intégrale première en mécanique du point matériel, est constante. Cette relation est connue sous le nom de *loi de Bernoulli* :

$$\frac{\rho u^2}{2} + p + \varphi = C^{te} \text{ le long d'une ligne de courant} \quad (8.8)$$

8.1.3 Loi de Bernoulli en écoulement potentiel

La loi de Bernoulli prend une forme particulière lorsque le champ de vitesse est irrotationnel et dérive d'un potentiel ϕ , $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Pour l'établir, partons de l'équation d'Euler qui est l'équation de mouvement des fluides non visqueux :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (8.9)$$

L'équation d'Euler est identique à l'équation de Navier-Stokes à ceci-près que le terme proportionnel à la viscosité a disparu. Si les forces en volume dérivent d'un potentiel $-\varphi$, l'équation d'Euler devient :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla(p + \varphi) \quad (8.10)$$

En utilisant l'identité vectorielle : $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$ et le caractère irrotationnel du champ de vitesse, l'équation (8.10) devient :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{u^2}{2} + p + \varphi \right) = 0 \quad (8.11)$$

c'est-à-dire que la quantité : $\rho \partial \phi / \partial t + \rho u^2/2 + p + \varphi$ est spatialement constante dans tout l'écoulement (mais cette constante peut varier au cours du temps). Si l'écoulement est stationnaire, on retrouve la loi de Bernoulli (8.8) mais généralisée à l'ensemble du fluide du fait du caractère irrotationnel de l'écoulement.

8.2 Conservation de la quantité de mouvement en l'absence de viscosité

Le bilan de quantité de mouvement sur un volume Ω borné par une surface $\partial\Omega$ s'écrit d'une manière générale :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.12)$$

où $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ est le tenseur des contraintes. Si la viscosité est négligeable, $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, le bilan de quantité de mouvement se ramène à :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS. \quad (8.13)$$

Si de plus l'écoulement est stationnaire, on a la relation suivante entre le flux de quantité de mouvement, l'intégrale de pression sur la frontière $\partial\Omega$ et l'intégrale des forces en volume sur Ω :

$$0 = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS. \quad (8.14)$$

8.3 Conservation de la circulation. Théorème de Kelvin.

La circulation de la vitesse sur un contour fermé joue un rôle essentiel dans la détermination des forces exercées sur des obstacles. Nous allons voir comment évolue cette circulation lorsque le contour C se déplace avec le fluide. La variation de circulation au cours du temps est :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

où D/Dt est une dérivée "particulaire", calculée en suivant le mouvement d'une particule de fluide. La variation de la circulation Γ comprend deux contributions : la première est due au déplacement du contour C , entraîné par le mouvement du fluide, la seconde est due à la variation temporelle de la vitesse sur le contour, soit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} \quad (8.15)$$

La première intégrale peut être évaluée à partir de l'équation d'Euler : $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \varphi$ où φ est le potentiel dont dérivent les forces en volume (en prenant $\mathbf{f} = -\nabla \varphi$). Si la masse volumique est constante, cette première intégrale se ramène à la circulation de deux gradients sur un contour fermé, elle est donc nulle. La variation de longueur de l'élément de contour $d\mathbf{l}$, par unité de temps, est simplement la différence des vitesses aux deux extrémités de cet élément, soit : $\frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ et la seconde intégrale devient :

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \oint_C \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{1}{2} \nabla (u^2) \cdot d\mathbf{l} \quad (8.16)$$

C'est à nouveau l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé. Donc la variation de circulation sur un contour fermé qui suit l'écoulement est nulle :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (8.17)$$

Ce résultat, qui constitue le théorème de Kelvin, n'est valide que si i) le fluide n'est pas visqueux, ii) si la masse volumique est constante et iii) si les forces en volume dérivent d'un potentiel.

8.4 Écoulements potentiels

8.4.1 Propriétés du potentiel des vitesses

Une des propriétés importantes des écoulements de fluides parfaits est que si un volume de fluide est irrotationnel ($\omega = \nabla \wedge \mathbf{u} = 0$), il le reste indéfiniment. Si par exemple, le fluide est initialement au repos et mis en mouvement par l'application d'un gradient de pression, l'écoulement créé sera potentiel. Cette propriété n'est pas vérifiée exactement dans les fluides réels. Néanmoins, dans certaines conditions, en particulier sur les corps profilés, les effets visqueux sont uniquement présents dans les couches limites et, en dehors des couches limites, l'écoulement peut être considéré comme potentiel.

Si, de plus, le fluide est incompressible, le caractère irrotationnel : $\mathbf{u} = \nabla\phi$ couplé à la condition d'incompressibilité conduit à :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \Delta\phi = 0 \quad (8.18)$$

Le potentiel des vitesses obéit à l'équation de Laplace et la résolution de l'équation de mouvement se ramène à la recherche de fonctions harmoniques satisfaisant les conditions aux limites. Ce problème est exactement équivalent à celui rencontré en électrostatique. En l'absence de viscosité, les parois solides n'imposent plus une condition de vitesse nulle. Le fluide ne peut néanmoins pas les traverser, c'est-à-dire que la composante de vitesse normale à la paroi doit être nulle, soit $\partial\phi/\partial n = 0$ où n est une coordonnée dans une direction normale à la paroi solide.

La linéarité de l'équation de Laplace permet d'additionner des solutions obtenues indépendamment. Il suffit que le potentiel obtenu finalement respecte les conditions aux limites. À deux dimensions, le caractère potentiel de l'écoulement impose que la fonction de courant ψ satisfasse également l'équation de Laplace. En effet :

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \mathbf{k} = 0 \quad (8.19)$$

\mathbf{k} étant le vecteur unitaire normal au plan xy . La vitesse est orthogonale aux lignes équipotentielles $\phi = Cte$ et tangente aux lignes de courant $\psi = Cte$. Les équipotentielles et les lignes de courant constituent donc des réseaux de courbes orthogonales. Nous allons examiner quelques solutions simples de l'équation de Laplace.

8.4.2 Écoulements potentiels simples

Écoulement uniforme

Le champ de vitesse est donné par : $u_x = U$, $u_y = 0$. Le potentiel des vitesses correspondant est : $\phi = Ux$ et la fonction de courant est $\psi = Uy$ (Fig. 8.1).

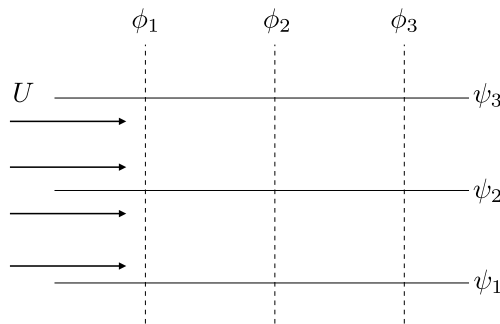


FIGURE 8.1 – Equipotentielles et lignes de courant pour un écoulement uniforme.

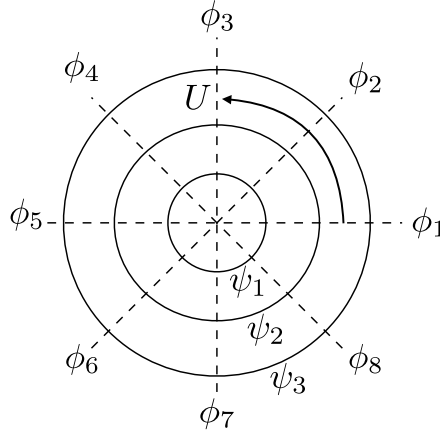


FIGURE 8.2 – Tourbillon. Lignes de courant et équipotentiellles.

Tourbillon

Les lignes de courant sont circulaires. Le champ de vitesse est $u_r = 0, u_\theta = \Gamma/2\pi r$. Le potentiel des vitesses correspondant est donné par : $u_\theta = 1/r \partial\phi/\partial\theta$, soit :

$$\phi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \quad (8.20)$$

Les équipotentiellles sont des droites $\theta = Cte$. La fonction de courant est donnée par : $u_\theta = 1/r \partial\phi/\partial r$, d'où :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (8.21)$$

Les lignes de courant sont des cercles espacés exponentiellement. La circulation de la vitesse sur un cercle de rayon r est :

$$C = \int u_\theta dl = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma \quad (8.22)$$

Le paramètre Γ est donc la circulation associée au tourbillon. Cette circulation est indépendante du rayon du cercle. En conséquence, le flux du rotationnel de la vitesse sur une surface limitée par deux cercles de rayon quelconque centrés en O est nul. L'écoulement est bien irrotationnel, sauf en $r = 0$ où il existe une singularité de la vorticité. Cette singularité est responsable de la circulation non nulle sur un contour qui entoure le centre du tourbillon. Cette situation est analogue au champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant.

On peut également noter que le potentiel défini par (8.20) n'est pas univoque. En tournant plusieurs fois autour du centre du tourbillon, on obtient des valeurs différentes du potentiel en un même point de l'espace. Cette multiplicité du potentiel est due à la singularité de vorticité placée en $r = 0$. De manière analogue, en magnétisme, la présence de courants rend le potentiel vecteur non univoque.

Source

Une source (ou un puits) est un écoulement purement radial dont le débit total est Q . Le champ de vitesse est : $u_r = \frac{Q}{2\pi r}, u_\theta = 0$. Si Q est positif, l'écoulement diverge depuis le centre (source) ; si Q est négatif, l'écoulement converge (puits). Le potentiel des vitesses correspondant est donné par : $u_r = \partial\phi/\partial r$, d'où :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (8.23)$$

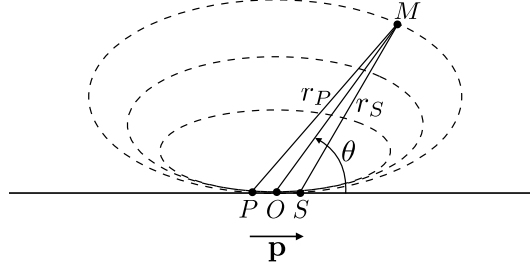


FIGURE 8.3 – Écoulement créé par un dipôle. Les lignes de courant sont des ellipses (en trait pointillé)

La fonction de courant est donnée par : $u_r = \frac{1}{r} \partial\psi / \partial\theta$, d'où : $\psi = \frac{Q\theta}{2\pi}$. Remarquons que le potentiel et la fonction de courant ont la même forme que pour le tourbillon, mais leurs rôles sont inversés.

Dipôle

De la même manière qu'en électrostatique deux charges proches de signes opposés constituent un dipôle, nous pouvons fabriquer un dipôle en rapprochant une source et un puits de débits opposés. Le potentiel des vitesses pour le dipôle est la somme du potentiel du puits et de la source, soit :

$$\phi = \phi_s + \phi_p = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_s}{a} - \ln \frac{r_p}{a} \right) \quad (8.24)$$

où r_s est la distance à la source et r_p la distance au puits. En faisant tendre la distance d entre puits et source vers 0, tout en gardant le produit $p = dQ$ constant, les distances r_s et r_p deviennent très grandes devant d . Il est alors possible de faire un développement de $\ln r_s$ et $\ln r_p$ autour de $\ln r$ où r est la distance entre le point considéré et le centre du dipôle. Soit : $\ln r_s = \ln r + \frac{\partial \ln r}{\partial r} (r_s - r)$. D'où :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi r} (r_s - r_p) \approx \frac{Qd \cos \theta}{2\pi r} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2} \quad (8.25)$$

où θ est l'angle entre l'axe du dipôle et \mathbf{r} . Le champ de vitesse correspondant est :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} = \frac{px}{2\pi r^3} \text{ et } u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} = \frac{py}{2\pi r^3} \quad (8.26)$$

et la fonction de courant est : $\psi = -p \sin \theta / 2\pi r = -p y / 2\pi r^2$.

8.4.3 Écoulement autour d'un cylindre

La recherche du potentiel des vitesses pour l'écoulement autour d'un obstacle doit satisfaire uniquement à deux conditions : loin de l'obstacle, on doit retrouver un écoulement uniforme avec un potentiel $\phi = Ux$ et sur l'obstacle, la vitesse normale à la paroi doit être nulle, c'est-à-dire que la paroi doit être une ligne de courant¹. L'obstacle constituant une perturbation de l'écoulement uniforme, une des méthodes pour trouver le potentiel consiste à ajouter au champ de vitesse uniforme, la vitesse résultant d'un développement multipolaire du potentiel. Nous avons vu ci-dessus ce que sont le potentiel d'un monopôle (source) et d'un dipôle. On peut définir de la même manière, le potentiel d'un quadrupôle et des multipôles d'ordres plus élevés. La propriété d'additivité de l'équation de Laplace fait que tous ces développements multipolaires satisfont également à l'équation de Laplace.

1. Attention, on néglige ici les effets de la viscosité, le fluide peut alors glisser le long de la paroi. Ce n'est évidemment pas le cas avec un fluide réel. Le cylindre considéré ici serait un cylindre virtuel situé au-dessus de la couche limite.

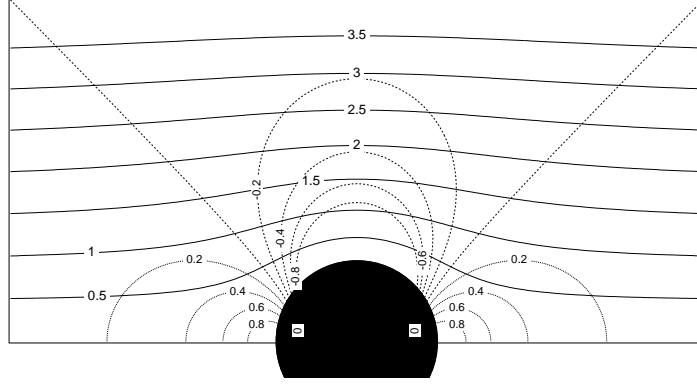


FIGURE 8.4 – écoulement potentiel autour d'un cylindre. Lignes de courant (ψ normalisée par Ua) en trait plein et isobares (pression normalisée par la pression dynamique) en pointillés.

Considérons ici l'ajout du potentiel d'un dipôle à un écoulement uniforme permettant de représenter l'écoulement autour d'un cylindre. L'axe du dipôle est parallèle à l'écoulement moyen pour conserver la symétrie axiale et le potentiel est :

$$\phi = Ux - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = \left(Ur - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta \quad (8.27)$$

Le champ de vitesse correspondant est :

$$u_r = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad u_\theta = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \quad (8.28)$$

Il doit satisfaire aux conditions aux limites : $\mathbf{u} = U\mathbf{i}$ à l'infini et $u_r = 0$ en $r = a$ (sur le cercle). La première condition est vérifiée quelle que soit la force du dipôle parce que le potentiel du dipôle décroît en $1/r$ et que sa contribution s'annule à l'infini. La seconde condition impose la force du dipôle : $p = -2\pi a^2 U$ et le potentiel résultant est :

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (8.29)$$

et le champ de vitesse est :

$$u_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad u_\theta = -U \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (8.30)$$

La fonction de courant s'en déduit par intégration :

$$\psi = -Ur \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (8.31)$$

Les lignes de courant sont représentées sur la fig. 8.4. Il est facile de déterminer le champ de pression ; puisque l'écoulement est potentiel, la loi de Bernoulli s'applique dans tout l'écoulement :

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (U^2 - u^2) = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{a^2}{r^2} \left(2 \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (8.32)$$

Sur le cylindre ($r = a$), la pression est : $p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2 (2 \cos 2\theta - 1)$. Aux points où la vitesse est nulle (en $\theta = 0$ et π), on retrouve la pression de stagnation : $p = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2$.

En intégrant la pression sur le pourtour du cylindre, nous obtenons la force exercée par l'écoulement et en particulier sa composante dans la direction de l'écoulement moyen :

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta a \, d\theta = -\frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \cos \theta (2 \cos 2\theta - 1) \, d\theta = 0 \quad (8.33)$$

La force de traînée est nulle, en raison de l'hypothèse que nous avons faite de négliger la viscosité et de ne pas imposer de condition de non glissement à la surface du solide. Comme nous le verrons, un même résultat est obtenu pour tout corps solide dans un écoulement potentiel. Cette propriété découverte par d'Alembert constitue un paradoxe apparent, parce dans la vraie vie la force de traînée n'est jamais nulle du fait de la traînée de friction.

Chapitre 9

Portance et traînée

Nous avons vu qu'à petit nombre de Reynolds, la force exercée sur objet de taille L par un écoulement de vitesse moyenne U est fixé uniquement par la viscosité et varie comme ηUL . En revanche, lorsque le nombre de Reynolds est très grand devant l'unité, une couche limite se développe sur l'objet qui donne une force de traînée variant comme $(\eta\rho)^{1/2}U^{3/2}L^{3/2}$. Regardons à présent comment varient ces forces, d'une part en considérant l'écoulement autour de l'objet comme potentiel, d'autre part en prenant en compte le décollement des couches limites sur des corps non profilés.

9.1 Forces sur un obstacle en écoulement potentiel

La force exercée par l'écoulement sur un corps solide dépend de la forme de ce corps. Néanmoins, dans le cas des écoulements potentiels, des résultats très généraux peuvent être obtenus en considérant la forme asymptotique de l'écoulement loin de l'obstacle.

9.1.1 Potentiel des vitesses à grande distance du corps

L'écoulement potentiel autour d'un objet peut être représenté par la somme d'un écoulement moyen, caractérisé par un potentiel $\Phi = Ux$ et d'une succession de singularités telles que la vitesse résultante soit tangente à la surface du corps. À grande distance r du corps, on ne conserve que les termes dominants des singularités.

Dans un écoulement bidimensionnel, la forme asymptotique du potentiel est :

$$\phi(\mathbf{r}) = \Phi + \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + c \ln r + c_1 \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (9.1)$$

Le premier terme du développement est le potentiel d'un tourbillon, il correspond à l'existence possible d'une circulation autour de l'obstacle. Le second terme est le potentiel d'une source. L'intégrale sur un contour fermé de l'écoulement lié à ce terme de source est un débit c . En raison de la condition de vitesse normale nulle imposée sur le corps solide, ce débit doit être nul. Le terme suivant est le potentiel d'un dipôle et il est possible de poursuivre le développement par des termes multipolaires. À grande distance, le terme dipolaire domine les termes d'ordre plus élevé. Si la circulation Γ n'est pas nulle, sa contribution (décroissant en $1/r$) au champ de vitesse est dominante. En revanche, si la circulation est nulle, le terme dipolaire donne la contribution dominante (en $1/r^2$) au champ de vitesse. Nous avons vu que, dans le cas d'un cylindre, le développement (9.1) donne la solution exacte de l'équation de Laplace.

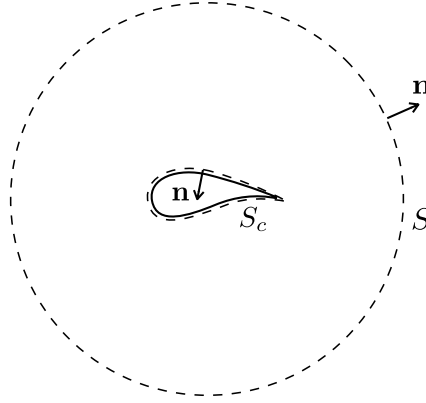


FIGURE 9.1 – Volume de contrôle utilisé pour calculer la force sur un corps solide.

9.1.2 Force sur un corps solide

Nous utilisons la loi de conservation de l'impulsion pour calculer la force \mathbf{F} exercée sur le solide. Nous considérons un volume de contrôle limité, d'une part, par la surface du solide S_c et, d'autre part, par un cylindre S situé à grande distance (fig. 9.1). À trois dimensions, le cylindre est remplacé par une sphère. Puisqu'il n'y a pas ici de contraintes engendrées par la viscosité, \mathbf{F} est l'intégrale de la pression sur la surface S_c du corps : $\mathbf{F} = \int_{S_c} p \tilde{\mathbf{n}} dS$ où $\tilde{\mathbf{n}}$ est à la normale à S_c orientée vers le fluide. D'autre part, la conservation de la quantité de mouvement appliqué au volume limité par S_c et S donne :

$$\int_{S+S_c} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S+S_c} p \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{f} dV \quad (9.2)$$

où \mathbf{f} est la force par unité de volume exercée sur le fluide (la gravité par exemple) et \mathbf{n} la normale à $S + S_c$ orientée vers l'extérieur du volume de contrôle. À la surface du corps solide, la composante normale de vitesse est nulle et le flux de quantité de mouvement à travers cette surface est donc nul. En supposant que la force en volume est nulle (l'ajout de la force de gravité donnerait la poussée d'Archimède exercée sur le corps), l'équation de conservation de l'impulsion devient :

$$\int_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_S p \mathbf{n} dS = -\mathbf{F} \quad (9.3)$$

Décomposons maintenant le champ de vitesse \mathbf{u} en la somme de la vitesse à l'infini \mathbf{U} et d'une perturbation \mathbf{v} due à l'obstacle et utilisons la loi de Bernoulli pour évaluer la pression :

$$p + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (9.4)$$

Si la surface S est placée suffisamment loin de l'obstacle, la perturbation \mathbf{v} est petite devant la vitesse moyenne \mathbf{U} et il est possible de négliger le terme en v^2 dans le membre de gauche de (9.4), d'où :

$$p - p_\infty \approx -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{U} \quad (9.5)$$

En reportant cette expression de la pression dans (9.3), il vient :

$$\mathbf{F} = \int_S p_\infty \mathbf{n} dS - \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{U} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.6)$$

Les intégrales de p_∞ et U (qui sont constants) sur le contour fermé S sont nulles. L'intégrale $\int_S \rho \mathbf{U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ est également nulle ; c'est, au facteur U près, l'intégrale de la perturbation \mathbf{v} sur la surface S , c'est-à-dire le débit de fluide à travers S associé à la perturbation. Nous avons vu que

la présence du corps solide empêche d'avoir un terme de source pour le potentiel de perturbation. Ce débit est donc nul. Finalement, la force exercée sur le solide est :

$$\mathbf{F} = - \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n} dS + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho [(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{n}] dS \quad (9.7)$$

Soit, en utilisant la relation vectorielle : $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$,

$$\mathbf{F} = - \int_S \rho \mathbf{U} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) dS = -\rho \mathbf{U} \wedge \int_S (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) dS \quad (9.8)$$

Cette dernière expression montre que la force \mathbf{F} est toujours orthogonale à la direction moyenne de l'écoulement. Il n'y a pas de force de traînée dans un écoulement potentiel. Nous retrouvons sous forme générale le résultat obtenu pour l'écoulement autour d'un cylindre.

Dans un écoulement tridimensionnel autour d'un corps de dimensions finies, le terme dominant du potentiel des vitesses est le terme dipolaire en $1/r^2$. Le champ de vitesse correspondant décroît en $1/r^3$. L'intégrale de cette perturbation sur une sphère de surface proportionnelle à r^2 décroît comme $1/r$. Il est possible de placer la surface S arbitrairement loin et l'intégrale de \mathbf{v} est nulle. La force de portance (normale à l'écoulement moyen) est donc aussi nulle dans ce cas. Dans un écoulement bidimensionnel, en présence d'une circulation autour du corps solide, c'est ce terme de circulation qui domine la perturbation \mathbf{v} à grande distance. Pour les mêmes raisons qu'à trois dimensions, la contribution du terme dipolaire à la force \mathbf{F} est nulle. Le champ de vitesse \mathbf{v} est donné par le potentiel d'un tourbillon :

$$\mathbf{v} = \nabla \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \nabla \theta \quad (9.9)$$

et, en choisissant S comme un cercle de rayon r , la normale \mathbf{n} a pour composantes $\cos \theta$ et $\sin \theta$. La composante F_y s'exprime de la manière suivante, pour un écoulement moyen dirigé suivant l'axe x :

$$F_y = -\rho U \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \right) r d\theta = -\rho U \Gamma \quad (9.10)$$

Ce dernier résultat qui montre que la portance est proportionnelle au produit de la vitesse moyenne et de la circulation, est connu sous le nom de relation de Kutta-Joukowski. Il faut noter que la vitesse \mathbf{U} est exprimée dans un repère où le corps solide est immobile ; \mathbf{U} est la vitesse du fluide à l'infini. Nous pouvons interpréter simplement le signe de la force de portance en utilisant la loi de Bernoulli. Supposons que l'écoulement moyen du fluide se fasse de droite à gauche, soit : $\mathbf{U} = (-U, 0)$ et que la circulation Γ soit positive (dans le sens trigonométrique). Au dessus du solide, l'écoulement créé par la circulation se rajoute à l'écoulement moyen. En dessous, il s'oppose à l'écoulement moyen. La vitesse du fluide est donc plus grande au-dessus de l'obstacle qu'en dessous. En application de la loi de Bernoulli, la pression est plus basse au-dessus de l'obstacle. Donc la force résultante est dirigée vers le haut (F_y positif, en accord avec (9.10) pour une vitesse moyenne négative et une circulation positive.)

La portance développée sur des ailes ou des voiles est donc liée à l'existence d'une circulation autour de ces profils. Un cylindre ou une sphère en rotation (comme une balle de tennis ou un ballon de football frappé avec un effet) sont également soumis à une force de portance. Là encore, la viscosité joue un rôle important : la surface solide en rotation entraîne le fluide environnant qui doit respecter la condition de non glissement sur la surface et un écoulement tourbillonnaire est ainsi créé. Dans certaines conditions, le champ de vitesse réel est peu différent de celui déterminé par une théorie "potentielle" et la force de portance réelle est très voisine de celle prédite par la relation de Kutta-Joukowski. Les cylindres tournants ont été effectivement utilisés comme "surfaces portantes" sur un navire imaginé par Flettner dans les années 20 : deux grands cylindres verticaux entraînés par des moteurs remplaçaient les voiles traditionnelles.

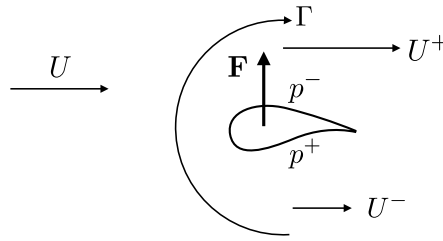


FIGURE 9.2 – Portance engendrée par un écoulement bidimensionnel couplé à une circulation Γ autour de l'obstacle.

9.1.3 Etablissement de la circulation autour d'un profil portant

La viscosité joue en fait un rôle déterminant dans l'établissement de la circulation autour d'un profil portant. Pour le comprendre, examinons le champ de vitesse autour d'un profil d'aile *en l'absence de circulation*. (Fig. 9.3). Le profil est symétrique, l'angle d'incidence est non nul et le champ de vitesse irrotationnel est obtenu en résolvant l'équation de Laplace pour le potentiel. Il y a deux points de stagnation (points où une ligne de courant est perpendiculaire à la surface), l'un près du bord d'attaque et l'autre près du bord de fuite. Le point de stagnation arrière n'est pas situé au bord de fuite et les lignes de courant doivent contourner le profil d'aile. Cette géométrie des lignes de courant qui conduirait à une très forte accélération du fluide est instable.

Lorsque un profil portant est mis en mouvement ou change d'angle d'incidence, un tourbillon est émis au bord de fuite (fig. 9.4) qui permet au point de stagnation arrière de revenir exactement au bord de fuite. Cette situation, appelée condition de Joukowski, fixe la circulation autour du profil et donc la valeur de la portance.

Le théorème de Kelvin impose que, en l'absence de viscosité, la circulation autour d'un contour se déplaçant avec le fluide reste constante. Considérons un contour entourant l'aile; initialement si l'aile est immobile, la vitesse relative est nulle et la circulation également. Le théorème de Kelvin nous dit que cette circulation globale reste nulle. Ceci implique que lors de la mise en mouvement de l'aile, la circulation associée au tourbillon émis soit exactement opposée à la circulation autour du profil (aux effets visqueux près).

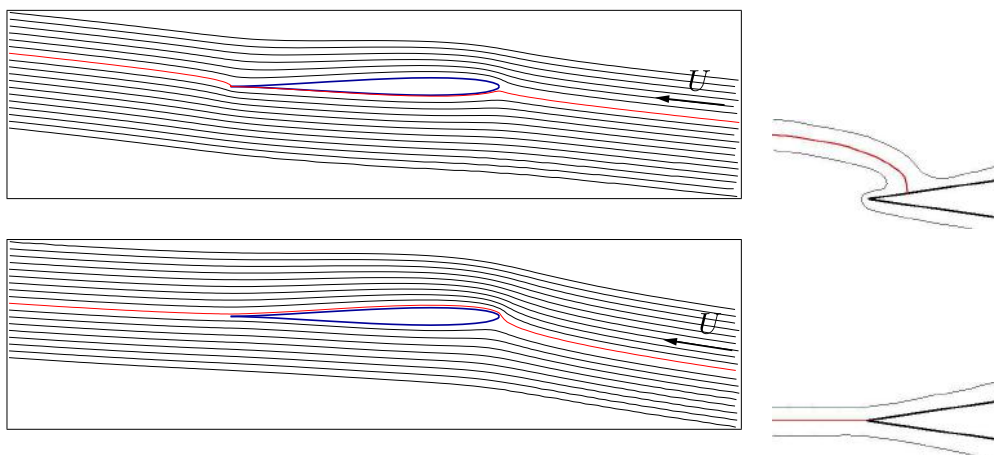


FIGURE 9.3 – Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile. En haut sans circulation. En bas, avec une circulation assurant la condition de Joukowski au bord de fuite. À droite, détail des lignes de courant près du bord de fuite.

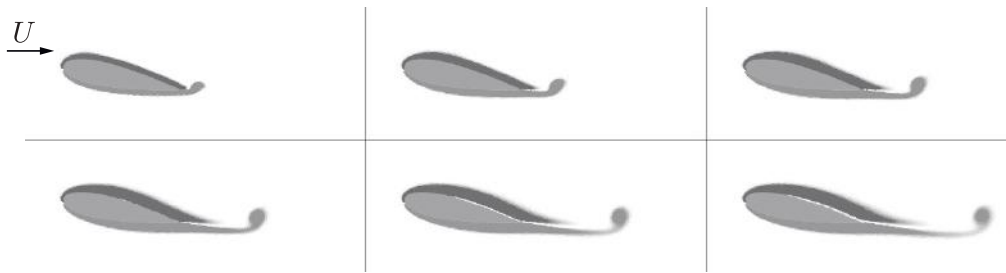


FIGURE 9.4 – Tourbillon émis au bord de fuite d’un profil d’aile mis brusquement en mouvement. Dans cette simulation numérique à $Re = 1000$, les niveaux de gris indiquent la vorticité. La valeur modeste du nombre de Reynolds conduit à des couches limites assez épaisses sur les bords inférieur et supérieur de l’aile.

9.2 Trainée de forme

9.2.1 Sillage des corps non profilés

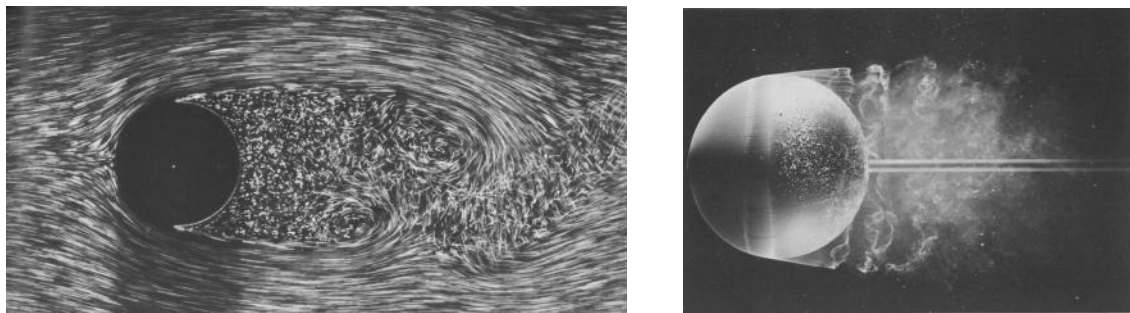


FIGURE 9.5 – Décollement de couche limite dans le sillage d’un cylindre (  gauche, $Re = 2000$) et d’une sphère (  droite, $Re = 15000$). Images H. Werlé, ONERA.

Sur un corps non profil  (un cylindre ou une sphère, par exemple), la couche limite se développe à partir du point de stagnation situé sur la face amont du corps. Sur la partie arrière du corps, la forme du solide impose une divergence rapide des lignes de courant, donc un ralentissement rapide de l’écoulement moyen. Ce ralentissement est la source d’un décollement de la couche limite (Fig. 9.5). La conséquence directe de ce décollement est la présence d’un sillage très large et une force de trainée très importante sur le corps. Afin de comparer l’influence de la forme de différents corps sur la force de trainée F_T , on définit un coefficient de trainée C_D (D comme Drag, trainée en anglais), tel que :

$$F_T = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_D \quad (9.11)$$

où S est la surface frontale du corps et $1/2\rho U^2$ est la pression dynamique qui, dans un écoulement à grand nombre de Reynolds, donne un ordre de grandeur de la surpression régnant sur la face amont du corps. C’est ce coefficient de trainée qu’on désigne traditionnellement par C_x pour les automobiles. Le coefficient de trainée est, en général, fonction du nombre de Reynolds. Toutefois, si les caractéristiques générales de l’écoulement varient peu, le coefficient de trainée reste presque constant. Ainsi, pour un cylindre, C_D varie de 1,4 à 1,2 lorsque Re varie de 10^2 à 10^5 (avec un minimum à 0,9 pour Re de l’ordre de 1000).   titre de comparaison, le coefficient de trainée d’un profil d’aile placé à angle d’incidence nul peut descendre en dessous de 10^{-2} . Cette faible trainée s’explique par l’absence de décollement appréciable de la couche limite sur l’ensemble du profil.

9.2.2 Surfaces portantes

Pour les écoulements potentiels, la présence d'une force portante sur un corps solide est associée à l'existence d'une circulation autour de ce corps et à une différence appréciable de vitesse entre la surface supérieure et la surface inférieure. De même que la traînée est caractérisée par le coefficient C_D , la force de portance est définie par un coefficient sans dimension C_L (L comme lift) tel que :

$$F_P = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_L \quad (9.12)$$

L'augmentation de l'angle d'incidence (angle entre l'écoulement loin de l'aile et l'axe du profil) se traduit d'abord par une augmentation de la portance, résultant essentiellement d'une accélération du fluide sur l'extrados. Néanmoins, lorsque l'angle d'incidence est augmenté au-delà d'une valeur qui dépend du nombre de Reynolds et de la forme exacte du profil, la portance diminue, de même que le rapport C_L/C_D (finesse) qui définit les performances de l'aile (fig. 9.6).

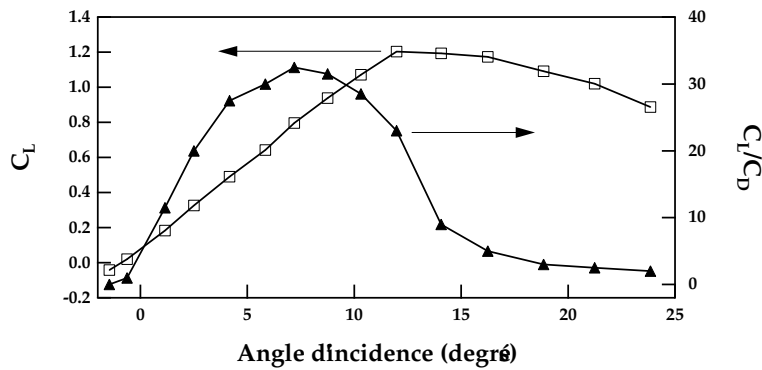


FIGURE 9.6 – Coefficient de portance (C_L) et finesse (C_L/C_D) pour un profil d'aile en fonction de l'angle d'incidence (mesures effectuées à Re de l'ordre de 10^6).

Cette diminution du coefficient de portance à grande incidence est lié au décollement de la couche limite à l'extrados du profil. À faible angle d'incidence, le décollement de la couche limite se produit loin du bord d'attaque. Sur la Fig. 9.7, l'angle d'incidence est très élevé et le décollement se produit immédiatement en aval du bord d'attaque et influence tout l'écoulement sur la partie supérieure du profil. Sur un voilier, il est possible de visualiser le décollement de couche limite en posant des petits brins de laine sur les voiles, en particulier, le long du bord d'attaque. Lorsque les brins de laine se retournent, c'est le signe d'une inversion de l'écoulement sur la voile et donc du décollement de couche limite. C'est aussi le signe que l'angle incidence est trop grand et que la voile est incorrectement réglée.

9.2.3 Contrôle de la couche limite

Le décollement de couche limite étant générateur de perte de portance et d'augmentation de traînée, il faut chercher à le réduire. Différentes solutions ont été apportées à ce problème, en particulier en aéronautique. On a envisagé d'aspirer la couche limite en perçant de petits trous dans la paroi solide et en pompant le fluide. L'efficacité de ce procédé a été prouvé en soufflerie et sur quelques avions prototypes mais il n'a pas encore été mis en œuvre sur des appareils produits en série. En revanche, le procédé de "soufflage" qui consiste à injecter tangentiellement du fluide à grande vitesse dans la couche limite est très efficace et plus simple à mettre en oeuvre. Tous les avions de transport modernes sont équipés de volets à fentes aussi bien au bord d'attaque qu'au bord de fuite des ailes (Fig. 9.8). Ces volets sont entièrement déployés à l'atterrissage. Pour des raisons de sécurité, l'atterrissage doit s'effectuer à la vitesse la plus faible possible. Pour maintenir une portance suffisante, il est nécessaire de braquer l'avion et d'augmenter considérablement l'angle

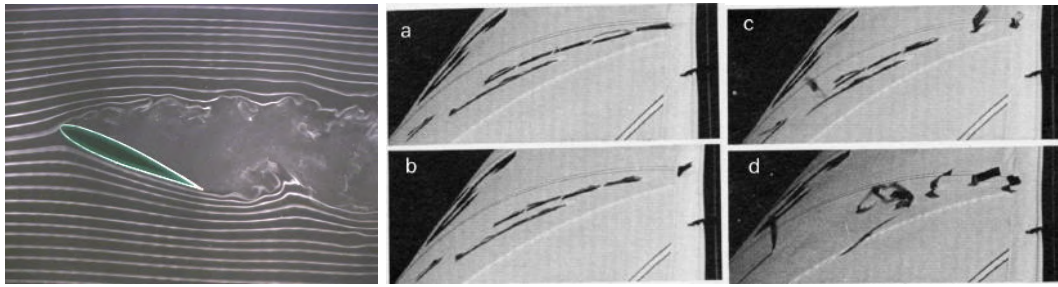


FIGURE 9.7 – À gauche : profil d'aile symétrique à 25° d'incidence. À droite, mise en évidence de l'écoulement sous le vent d'une voile, avec des angles d'incidence croissants (de a à d). *The best of sail trim*, Charles Mason ed., Rowman & Littlefield (2000)

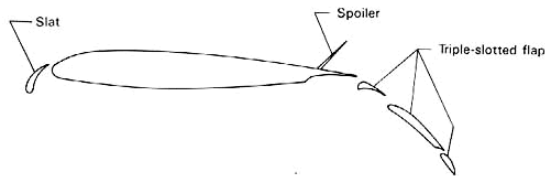


FIGURE 9.8 – Schéma d'un profil d'aile avec bec de bord d'attaque et volets de bord de fuite. Document NASA. A droite, volet de bord de fuite et générateurs de turbulence sur une aile de Boeing 767.

d'incidence. Les volets à fente de bord d'attaque réinjectent de l'air à haute vitesse sur l'extrados et retardent considérablement le décollement de la couche limite. Les volets de bord de fuite permettent de réorienter le flux d'air quittant l'aile vers le bas et augmentent ainsi la portance.

Annexe A

Propriétés physiques de quelques fluides

- ρ : masse volumique
- γ : tension superficielle
- η : viscosité dynamique
- $\nu = \eta/\rho$: viscosité cinématique
- λ : conductivité thermique
- $\kappa = \lambda/\rho C_p$: diffusivité thermique

	Air à 20°C	Eau à 20°C	Éthanol à 15°C	Glycérol à 15°C	Mercure à 15°C
$\rho(\text{kg/m}^3)$	1,205	998	790	1260	13610
γ (mN/m)		73	22	63	487
η (Pa.s)	$1,81 \times 10^{-5}$	$1,002 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-3}$	2,33	$1,58 \times 10^{-3}$
$\nu(\text{cm}^2/\text{s})$	0,15	0,01	0,017	18,5	$1,16 \times 10^{-3}$
$\lambda(\text{J/ms}^\circ\text{C})$	$2,53 \times 10^{-6}$	$5,9 \times 10^{-5}$	$1,83 \times 10^{-5}$	$2,9 \times 10^{-5}$	$8,0 \times 10^{-4}$
$\kappa(\text{cm}^2/\text{s})$	0,202	$1,42 \times 10^{-3}$	$9,9 \times 10^{-4}$	$9,8 \times 10^{-4}$	0,042

Annexe B

Notions élémentaires sur les tenseurs

B.1 Propriétés générales des tenseurs

(d'après C. Pozrikidis, "Introduction to theoretical and computational fluid dynamics").

Les équations de la mécanique des fluides amènent à manipuler des tenseurs, en particulier le tenseur des contraintes et le gradient de vitesse. Notons ici quelques unes de leurs propriétés essentielles.

Le caractère tensoriel d'une quantité se définit par rapport à ses transformations dans un changement de repère. Considérons deux systèmes de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) ayant une origine commune. Les coordonnées dans les deux systèmes d'axes sont reliées par :

$$y_i = A_{ij}x_j \quad \text{et} \quad x_i = y_j A_{ji}$$

où \mathbf{A} est une matrice de rotation telle que son inverse soit égale à sa transposée : $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Considérons maintenant une matrice 3x3 \mathbf{T} dont les éléments sont des paramètres physiques dépendant des coordonnées d'espace et de temps. Lorsque les valeurs des éléments de \mathbf{T} dans le système de coordonnées \mathbf{y} , notées $\mathbf{T}(\mathbf{y})$, sont reliées aux valeurs de ces mêmes éléments dans le système de coordonnées \mathbf{x} , notées $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, par les relations :

$$T_{ij}(\mathbf{y}) = A_{ik}A_{jl}T_{kl}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad T_{ij}(\mathbf{x}) = T_{kl}(\mathbf{y})A_{ki}A_{lj}$$

la matrice \mathbf{T} est un tenseur de rang deux. Une des caractéristiques importantes des tenseurs de rang deux est l'invariance de leur polynôme caractéristique $Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ dans un changement de repère. De ce fait les racines du polynôme caractéristique, qui sont les valeurs propres du tenseur sont également invariantes par changement de repère.

Le polynôme caractéristique peut s'exprimer en fonction des trois invariants du tenseur :

$$Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_3\lambda^2 - I_2\lambda + I_1$$

ces trois invariants ayant les expressions suivantes :

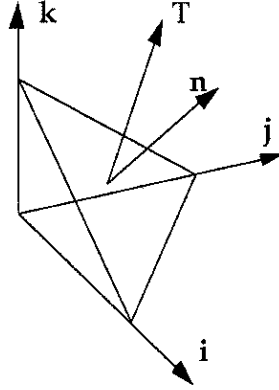
$$I_1 = Det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}([Tr(\mathbf{T})]^2 - Tr(\mathbf{T}^2))$$

$$I_3 = Tr(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Le gradient de vitesse $\nabla\mathbf{u}$ obéit aux règles de transformation énoncées ci-dessus, c'est donc un tenseur cartésien de rang deux. En effet, les composantes de vitesse se transforment comme les coordonnées d'espace, puisqu'elles sont des dérivées par rapport au temps de ces coordonnées :

$$u_i(\mathbf{y}) = A_{ij}u_j(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{y})A_{ij}$$

FIGURE B.1 – vecteur contrainte \mathbf{T} sur une facette de normale \mathbf{n}

En utilisant la règle de dérivations successives, on a pour la composante $(\nabla \mathbf{u})_{ij}$ du gradient :

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki} A_{lj} \frac{\partial u_l(\mathbf{y})}{\partial y_k}$$

Le gradient se transforme donc comme :

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij}(\mathbf{x}) = A_{ki} A_{lj} (\nabla \mathbf{u})_{kl}(\mathbf{y}).$$

Le troisième invariant, la trace du tenseur, est ici égal à la divergence de la vitesse. Il caractérise le changement de volume, par unité de temps, d'un élément de fluide. Lorsque le fluide peut être considéré comme incompressible, la trace de $\nabla \mathbf{u}$ est nulle. Les parties symétrique et antisymétrique de $\nabla \mathbf{u}$ sont également des tenseurs de rang deux.

Un autre exemple de tenseur de rang deux est le flux de quantité de mouvement $\rho u_i u_j$. Un raisonnement analogue à celui fait pour le gradient de vitesse montre qu'il se transforme dans un changement de repère comme :

$$\rho u_i u_j(\mathbf{x}) = A_{ki} A_{lj} \rho u_k u_l(\mathbf{y})$$

B.2 Tenseur des contraintes

Considérons un élément de surface δA au sein du fluide, défini par son vecteur normal \mathbf{n} . Les forces exercées par le fluide se trouvant d'un côté de la surface sur le fluide se trouvant de l'autre côté ont une résultante que nous notons $\mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A$. Par convention, \mathbf{T} est la contrainte exercée par le fluide vers lequel pointe la normale \mathbf{n} . Ainsi, une contrainte positive représente une tension et une contrainte négative une compression.

Considérons un tétraèdre dont trois des faces ont pour vecteur normal les vecteurs unitaires des axes de coordonnées \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} . La quatrième face a un vecteur normal \mathbf{n} . La résultante des forces de surface sur ce tétraèdre est : $\mathbf{T}(\mathbf{n})\delta A + \mathbf{T}(-\mathbf{i})\delta A_1 + \mathbf{T}(-\mathbf{j})\delta A_2 + \mathbf{T}(-\mathbf{k})\delta A_3$. Les signes - qui apparaissent devant \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} proviennent du fait qu'il faut considérer la normale dirigée vers l'extérieur du tétraèdre. Ensuite, tenons compte du fait que les facettes $\delta A_1, \delta A_2,$ et δA_3 sont des projections de δA , soit : $\delta A_1 = \delta A \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}$ et que $\mathbf{T}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{n})$. La résultante des forces devient donc : $[\mathbf{T}(\mathbf{n}) - \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{i}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{j}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{k})]\delta A$. L'équation de la dynamique pour ce tétraèdre s'écrit : masse x accélération = somme des forces de volume + somme des forces de surface. Si on fait tendre les dimensions linéaires du tétraèdre vers 0, les deux premiers termes de l'équation de mouvement tendent vers 0 comme $\delta V \propto \delta A^{3/2}$. L'égalité est respectée quel que soit δV seulement

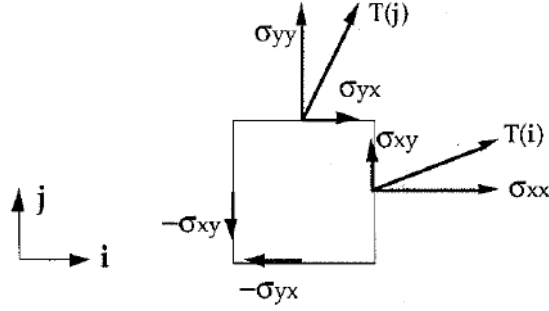


FIGURE B.2 – Vecteurs contraintes et contraintes sur les facettes orientées perpendiculairement aux vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} .

si le coefficient de δA est nul, soit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{i}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{j}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \mathbf{T}(\mathbf{k}) \quad (\text{B.1})$$

et, en considérant uniquement la composante selon l'axe x :

$$T_x(\mathbf{n}) = n_x T_x(\mathbf{i}) + n_y T_x(\mathbf{j}) + n_z T_x(\mathbf{k}) \quad (\text{B.2})$$

Dans cette expression, $T_x(\mathbf{j})$ est la composante suivant l'axe x du vecteur contrainte qui s'exerce sur une facette de normale \mathbf{j} . Toutes les composantes de ce type constituent un tenseur d'ordre deux, le tenseur des contraintes. L'équation B.1 peut s'écrire également :

$$T_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{B.3})$$

où les σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes ; dans le membre de droite de (B.3), on utilise la convention de sommation d'Einstein : lorsque le même indice est répété, on effectue la somme sur toutes les valeurs possible de cet indice (par exemple, le produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ s'écrit : $a_i b_i$). Les composantes diagonales du tenseur sont les *contraintes normales* alors que les composantes hors diagonale sont les *contraintes tangentielles*, ou *contraintes de cisaillement*.

Les composantes du tenseur des contraintes ne sont pas indépendantes. Considérons un petit élément de volume parallélépipédique, dont les dimensions sont dx , dy et dz . Ecrivons le couple exercé par les contraintes sur cet élément de volume et, en particulier, la composante suivant l'axe z : $\Gamma_z = \sigma_{xy}(dydz)dx - \sigma_{yx}(dxdz)dy = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\delta V$ L'équation de mouvement, en rotation, pour le petit élément de volume est :

$$\delta I \frac{d\omega}{dt} = \Gamma$$

où δI est le moment d'inertie dont l'ordre de grandeur est $\delta V^{5/3}$. Si on fait tendre les dimensions linéaires de l'élément de volume vers 0, pour que son accélération angulaire reste finie, il est nécessaire que Γ_z soit nul, ce qui impose : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Il est évidemment possible de faire le même raisonnement sur les autres composantes du couple. On en déduit que le tenseur des contraintes est symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Il n'y a donc que six composantes indépendantes. Il faut noter que cette symétrie n'est pas une propriété générale : par exemple, le tenseur des contraintes n'est pas symétrique dans un matériau magnétique, en présence d'un champ.

Annexe C

Équations en coordonnées cylindriques et sphériques

C.1 Équation de Navier-Stokes

C.1.1 Coordonnées cylindriques r, θ, x

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

où les opérateurs gradient et laplacien ont pour expression :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

C.1.2 Coordonnées sphériques r, θ, φ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\varphi + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{u_\varphi u_\theta \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left[\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right]\end{aligned}$$

où les opérateurs gradient et laplacien ont pour expression :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

C.2 Relations entre vitesse , potentiel et fonction de courant

\mathbf{u} est la vitesse, ϕ le potentiel et ψ est la fonction de courant.

C.2.1 Ecoulement bidimensionnel

Coordonnées cartésiennes

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Coordonnées polaires

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

C.2.2 Ecoulement tridimensionnel

Coordonnées cylindriques

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Coordonnées sphériques

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, u_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

C.2.3 Ecoulement tridimensionnel avec symétrie de révolution

Coordonnées cylindriques x, r, θ

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Coordonnées sphériques r, θ, φ

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, u_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Annexe D

Quelques repères historiques

Il s'agit ici d'une liste incomplète, très subjective. Le lecteur intéressé par ces aspects historiques consultera O. Darrigol, "Worlds of Flow. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl", Oxford University Press (2005), M. Eckert, "The dawn of fluid dynamics, a discipline between science and technology", Wiley-VCH (2006) et J.D. Anderson, "A history of aerodynamics", Cambridge University Press (1997).

- 1687 Isaac Newton est le premier à proposer une théorie du frottement visqueux dans les fluides. Ses conclusions sont erronées mais il comprend que la résistance à l'écoulement a lieu au sein du fluide. Cette idée ne sera reprise que 150 ans plus tard.
- 1732 Henri de Pitot décrit dans une note à l'Académie des Sciences "une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux". Cette machine est maintenant connue sous le nom de tube de Pitot.
- 1738 Daniel Bernoulli publie "Hydrodynamique, ou Mémoire sur les forces et les mouvements des fluides" dans lequel il exprime le principe de conservation de l'énergie
- 1750 Leonard Euler établit les équations de mouvement d'un fluide non visqueux et en déduit la loi que nous appelons maintenant "loi de Bernoulli". D'après Lagrange, Euler est le fondateur de la mécanique des fluides. Euler introduit le concept de "particule fluide", petit élément de volume qui permet de décrire le champ de vitesse.
- 1822 Claude Navier, en partant des idées de Newton sur le frottement visqueux, introduit la viscosité dans les équations de mouvement. Ces mêmes équations seront ensuite obtenues sous des formes différentes par Cauchy, Poisson, Saint-Venant et finalement G.G. Stokes en 1845.
- 1839 L'hydraulicien Ludwig Hagen étudie l'écoulement d'eau dans des tubes de diamètre millimétrique et montre la variation du débit en puissance quatrième du diamètre. En 1844, le médecin Jean-Louis Poiseuille, afin d'étudier le mouvement du sang dans les veines et vaisseaux capillaires, effectue indépendamment des mesures similaires et trouve également que le débit varie comme $\Delta p R^4 / L$.
- 1856 Henry Darcy, ingénieur des Ponts et Chaussées publie un mémoire sur "Les fontaines publiques de la ville de Dijon" dans lequel il établit la proportionnalité entre le débit de filtration dans les sols et la perte de charge.
- 1859 Helmholtz propose une décomposition du champ de vitesse en une partie rotationnelle et une partie irrotationnelle. Il utilise la notion de lignes de vorticité pour décrire l'évolution temporelle de tourbillons et surfaces de discontinuité.
- 1882 James Thomson observe que la convection dans une couche de liquide horizontale s'accompagne de l'apparition de mouvement "cellulaires". Henri Bénard fera en 1900 les premières études systématiques de l'apparition des cellules de convection. Lord Rayleigh en fait la première théorie en 1916.
- 1883 Osborne Reynolds met en évidence expérimentalement la transition laminaire-turbulent dans un écoulement dans un tube.
- 1897 Joseph Boussinesq établit une des premières théories des écoulements turbulents.

- 1900 Maurice Couette perfectionne considérablement “l’appareil à cylindres tournants” et réalise les premières mesures vraiment précises de viscosité.
- 1906 Joukovski établit la relation entre portance et circulation autour d’un profil portant.
- 1910 Ludwig Prandtl développe la théorie de la couche limite
- 1915 sir Geoffrey Taylor réalise des mesures de pression sur un avion en vol (une réussite remarquable compte tenu de ce qu’était l’aviation de l’époque). La même année, il élabore la première théorie de la diffusion par la turbulence. G.I. Taylor est sans aucun celui qui a apporté la plus grande contribution à la mécanique des fluides pendant la première moitié du vingtième siècle¹. Ses travaux touchent à tous les domaines de la dynamique des fluides et mêlent des théories novatrices et des expériences souvent simples et élégantes. G.I. Taylor s’est préoccupé aussi bien de problèmes fondamentaux que d’applications ; il est, par exemple, l’inventeur de l’ancre de marine dite C.Q.R. que l’on trouve maintenant sur presque tous les bateaux de plaisance. Lorsque les militaires américains rendirent public un enregistrement filmé de la première explosion nucléaire, G.I. Taylor détermina la puissance de la bombe (qui était gardée secrète) à partir de la vitesse d’expansion de la “boule de feu”, ce qui causa un certain émoi chez les dits militaires.
- 1921 Lewis Fry Richardson imagine, dans une vision orwelienne, le premier système de calcul parallèle pour les prévisions météorologiques : des opérateurs disposés régulièrement sur un bâtiment en forme de globe calculent localement l’évolution du champ de vitesse et de pression et, au signal d’un chef d’orchestre, transmettent les résultats à leurs voisins immédiats. Richardson apporte en 1926 une contribution importante à la diffusion par la turbulence en observant le mouvement de toutes sortes de traceurs dans l’atmosphère et dans les rivières (des tranches de navet par exemple !)
- 1938 Piotr Kapitza découvre la superfluidité de l’hélium, manifestation macroscopique de la condensation de Bose. Lev Landau établira une théorie de la transition superfluide quelques années plus tard.
- 1941 Le mathématicien Kolmogorov développe une approche statistique de la turbulence développée qui repose sur un échange continu d’énergie cinétique entre les différentes échelles spatiales.
- 1963 Le météorologiste Edward Lorenz met en évidence la “sensibilité aux conditions initiales” dans une simulation numérique des mouvements atmosphériques. Bien d’autres expériences de mécanique des fluides confirmeront cet aspect de “chaos déterministe” et remettront au goût du jour les idées développées par Henri Poincaré au début du siècle sur le mouvement chaotiques de corps célestes en interaction.
- 1975-7 Jerry Gollub et Harry Swinney à Princeton et Albert Libchaber et Jean Maurer à l’Ecole Normale Supérieure identifient clairement les premières transitions vers le chaos dans les écoulements. L’expérience de Gollub et Swinney n’est rien d’autre que l’analyse attentive des spectres de fluctuation dans l’instabilité de Taylor-Couette. Le coeur de l’expérience de Libchaber et Maurer est une minuscule cellule de convection contenant de l’hélium liquide. Depuis, d’autres types de transitions ont été découverts et le sujet a fait noircir des tonnes de papier.
- 1976 Brown et Roshko au California Institute of Technology mettent en évidence des structures organisées persistant dans des écoulements à très grand nombres de Reynolds. D’autres expériences, en particulier sur les couches limites, confortent l’idée qu’un écoulement turbulent conserve une organisation spatiale et temporelle qu’on ne peut décrire de manière purement statistique.
- 1980 Les premiers calculateurs parallèles permettent la simulation directe d’écoulements turbulents à des nombres de Reynolds raisonnables (quelques centaines). John Kim et Parviz Moin, au centre de recherche Ames de la NASA, utilisent le calculateur prototype ILLIAC-IV pour simuler un écoulement turbulent jusqu’à $Re = 14000$. Jusqu’à nos jours, la mécanique des fluides reste une des applications primordiales des supercalculateurs et les problèmes posés par la turbulence sont loin d’être résolus.

1. G.K. Batchelor, “Life and legacy of G.I. Taylor,” Cambridge University Press, 1996

Annexe E

Références bibliographiques

E.1 Références générales

- É. Guyon, J. P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, EDP Sciences CNRS Editions (2001) : le livre écrit par nos prédécesseurs à l'ESPCI.
- G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1970) : LA référence classique en mécanique des fluides. Quelque fois un peu calculatoire, mais très complet.
- D.J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics* (2nd edition), Oxford University Press (1988) : présentation moins formelle que Batchelor, plus “avec les mains”. De nombreux sujets “modernes”, qui vont au-delà de ce cours, sont traités dans la seconde édition.
- M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press (1982) : compilation de visualisations dans des conditions très diverses, de l'écoulement rampant à l'écoulement hypersonique. La consultation de cet ouvrage est très utile pour se faire une idée de la forme réelle des lignes de courant.
- E. Guyon, J. P. Hulin, L. Petit, *Ce que disent les fluides : La science des écoulements en images*, Belin (2005) : un autre “livre d'images” dans un esprit différent de Van Dyke.
- R.B.Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, Wiley (1960) : la mécanique des fluides appliquée au génie chimique. Un livre d'ingénieurs avec de nombreux exemples.
- G.M. Homsy et al., *Multimedia Fluid Mechanics*, Cambridge University Press (2008) : DVD interactif illustrant toutes les notions de base de la mécanique des fluides. Comprend une médiathèque avec plus de 800 animations et vidéos d'écoulements.
- A.Shapiro et al., *Films du NCFMF*, une série de films pédagogiques disponibles sur le web du MIT : <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.

E.2 Ouvrages plus spécialisés

1. Instabilités et turbulence
 - F. Charru *Instabilités Hydrodynamiques*, EDP Sciences/CNRS Editions (2007)
 - M. Lesieur, *Turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble (1994) : une bonne introduction à la turbulence qui peut se lire à un niveau élémentaire et à un niveau plus spécialisé.
 - J. Gleick, *La théorie du chaos*, Flammarion (1987) : compte-rendu très vivant de l'émergence de la science du chaos dans les années 70 et 80.
 - P. Bergé, Y. Pomeau, M. Dubois-Gance, *Des rythmes au chaos*, Odile Jacob (1997) : encore un ouvrage sur les instabilités et le chaos, par quelques uns des principaux chercheurs français dans le domaine.
2. Hydrodynamique physico-chimique

- F. Brochard-Wyart, P.G. de Gennes et D. Quéré, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin (2005) : un ouvrage de référence sur le mouillage et les écoulements interfaciaux avec plus de deux cents vidéos commentées sur CD-ROM.
 - P. Tabeling, *Introduction à la Microfluidique*, Belin (2003)
 - L. Boyer, *Feu et flammes*, Belin (2006) : une introduction très claire à la physique des flammes.
 - P. Oswald *Rhéophysique Ou comment coule la matière*, Belin (2005)
 - S. Hénon, B. Cabane *Liquides Solutions, dispersions, émulsions, gels*, Belin (2003)
3. Biophysique et géophysique
- S. Vogel, *Life in Moving Fluids*, Princeton Univeristy Press (1994) : une excellente introduction à l'interface biologie/mécanique des fluides.
 - D.E. Alexander, *Nature's Flyers : Birds, Insects, and the Biomechanics of Flight* , The Johns Hopkins University Press (2004)
 - E. Bryant, *Climate processes and change*, Cambridge University Press (1997)
 - G.K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-scale Circulation*, Cambridge University Press (2006)
4. La mécanique des fluides dans les sports
- C. A. Marchaj, *Sail Performance : Techniques to Maximize Sail Power*, International Marine Publishing (2003)
 - R. Garrett & D. Wilkie, *The Symmetry of Sailing : The Physics of Sailing for Yachtsmen*, Sheridan House (1996)
 - F. Fossati, *Aero-hydrodynamics and the Performance of Sailing Yachts : The Science Behind Sailing Yachts and Their Design*, Adlard Coles Nautical (2009)
 - C. Cohen, *La physique du sport*, thèse Ecole Polytechnique (2014)