

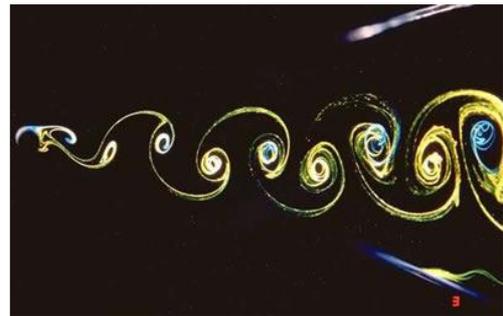
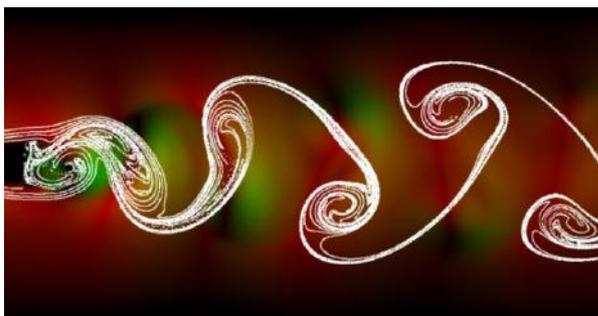
Mécanique des fluides (PC*)



La mécanique des fluides est un sous-ensemble de la mécanique des milieux continus. Elle comprend l'étude des gaz et des liquides à l'équilibre et en mouvement, ainsi que l'étude de l'interaction de ces derniers avec les corps solides. Son importance s'explique par le fondement théorique qu'elle offre à de nombreuses disciplines comme la météorologie, l'aérodynamique, l'étude des plasmas, ...

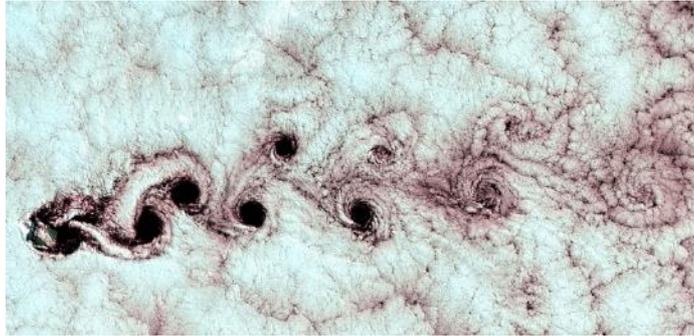
La maîtrise de l'eau, comme de l'air, a intéressé les hommes depuis la préhistoire, pour résoudre les problèmes d'irrigation et utiliser la force du vent pour propulser les bateaux. C'est Archimède, au III^{ème} siècle av. J.-C., qui a été le véritable initiateur de la "mécanique des fluides " en énonçant le théorème qui porte son nom. Bien qu'ils ne connussent pas les lois de l'hydraulique, les Romains utilisaient ses applications pour la construction de canaux ouverts pour la distribution d'eau. On l'ignore souvent, mais Léonard de Vinci a laissé des notes relatives aux vagues, aux tourbillons, aux corps flottants, aux écoulements dans des tubes et à la machinerie hydraulique. C'est lui qui a conçu, le premier, un parachute, l'anémomètre (pour mesurer la vitesse des vents) et une pompe centrifuge.

Au XVII^{ème} siècle, Pascal, à la suite de travaux sur le développement de méthodes de calcul, a donné un nouvel essor à l'hydraulique en expliquant, entre autres, les expériences de son contemporain Torricelli sur les pompes aspirantes. Ses travaux ont été repris durant les siècles suivants avec, en particulier, les innovations de Pitot (rendement des machines hydrauliques, tube de Pitot) et Venturi (travaux hydrauliques, construction d'une tuyère à cônes divergents). Les théoriciens Bernoulli et Euler ont grandement contribué à la formulation des principes de l'hydrodynamique ; de même, les travaux de Navier, en théorie générale de l'élasticité, et de Barré de Saint-Venant, auteur des premières expériences précises sur l'écoulement des gaz à grande vitesse et d'études théoriques complétées par Stokes, ont fait avancer de manière décisive la mécanique des fluides.



Allée tourbillonnaire derrière un cylindre circulaire

Mais il a fallu attendre le XX^{ème} siècle, avec la convergence de connaissances mathématiques et expérimentales et l'utilisation de calculateurs de plus en plus puissants, pour que soient véritablement abordés des problèmes aussi complexes que les écoulements de fluides visqueux dans des tuyaux cylindriques et que soient expliquées les différences entre les écoulements laminaires - étudiés par Poiseuille au milieu du XIX^{ème} siècle - et turbulents, par les travaux de Reynolds, notamment.



Rue de tourbillons alternés de Von Karman dans un écoulement à très grand nombre de Reynolds.

Ces domaines d'études, ainsi que les problèmes de couche limite développés par Prandtl ou ceux d'écoulements turbulents traités par Karman, font, aujourd'hui encore, l'objet de recherches poussées.



Tourbillon marginal (vortex) ; catapultage d'un F18.

L'étude des fluides au repos dans un repère donné constitue la statique des fluides. Elle comprend la statique des liquides (ou hydrostatique) et la statique des gaz (ou aérostatique).

La dynamique des fluides étudie, pour sa part, les fluides en mouvement. On distingue la dynamique des liquides (ou hydrodynamique) et la dynamique des gaz (ou aérodynamique). En outre, la dynamique des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétiques constitue un domaine à part, que l'on nomme la magnétohydrodynamique. Les diverses branches de la mécanique des fluides jouent un grand rôle dans de nombreux domaines, tant dans l'industrie que dans la recherche.



Tourbillons marginaux (vortex) ; au soleil couchant, noter les deux tourbillons des volets et la répartition elliptique de la portance matérialisée par la condensation de l'humidité de l'air.

L'hydrodynamique est nécessaire à la compréhension du fonctionnement de nombreux engins (pompes, moteurs, échangeurs de chaleur...) dans lesquels interviennent des écoulements de fluides dans des conduites. Elle est également à la base de la construction navale, de l'hydrologie, de l'océanographie.



Décollement aérodynamique sur une VW Beetle : le test aux fils de laine montre des décollements qui n'interviennent qu'au niveau du pare choc arrière de l'auto. Ceci est certainement dû à la dépression engendrée par les puissants tourbillons marginaux dus à la cambrure importante du toit. Ce que l'on gagne en traînée de pression et en partie perdu en traînée induite par la portance.

L'aérodynamique permet de concevoir avions, fusées, navettes spatiales... Sa connaissance contribue à la diminution de la consommation d'énergie des véhicules, en préconisant pour ceux-ci des formes "aérodynamiques" qui réduisent l'effet de la résistance de l'air à l'avancement. L'aérodynamique est également à la base de la météorologie et de l'étude de l'atmosphère des autres planètes.



La magnétohydrodynamique joue un rôle essentiel en astrophysique (modèles d'étoiles, dynamique de la matière interstellaire). Elle intervient également dans l'étude des gaz ionisés, ou plasmas (décharges électriques dans les gaz, confinement des plasmas par champs magnétiques destiné à la production contrôlée d'énergie par fusion thermonucléaire). Elle a aussi permis de réaliser des prototypes de centrales convertissant directement de l'énergie thermique en énergie électrique (convertisseurs magnétohydrodynamiques).

I) Etude phénoménologique des fluides :

1 – L'état fluide :

Un fluide est un système composé de nombreuses particules libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres. Dans un liquide comme dans un gaz, le mouvement des molécules est désordonné : c'est l'agitation thermique.

D'un point de vue quantitatif, on relève les différences suivantes :

- Dans un liquide, les distances intermoléculaires sont de l'ordre de grandeur des dimensions moléculaires, alors que dans un gaz, elles sont beaucoup plus grandes. Les forces d'interaction entre molécules (forces de Van der Waals en $1/r^7$) jouent un rôle beaucoup plus important dans les liquides que dans les gaz.
- Aux pressions usuelles, la densité particulaire des liquides est de l'ordre de 1 000 fois celle des gaz.
- Le coefficient de compressibilité χ d'un gaz est très supérieur à celui d'un liquide : dans la plupart des problèmes, les liquides pourront être considérés comme incompressibles.

Selon la définition élémentaire, un liquide a « un volume propre, mais pas de forme propre », alors qu'un gaz n'a pas de « volume propre mais tend à occuper tout l'espace qui lui est offert ».

En réalité, la distinction entre liquide et gaz n'est pas toujours évidente : en effet, le passage de la phase gazeuse à la phase liquide peut se faire sans transition (on parle alors de continuité de l'état fluide). Toutefois, dans les conditions normales de pression et de température, la phase liquide et la phase gazeuse se différencient très nettement.

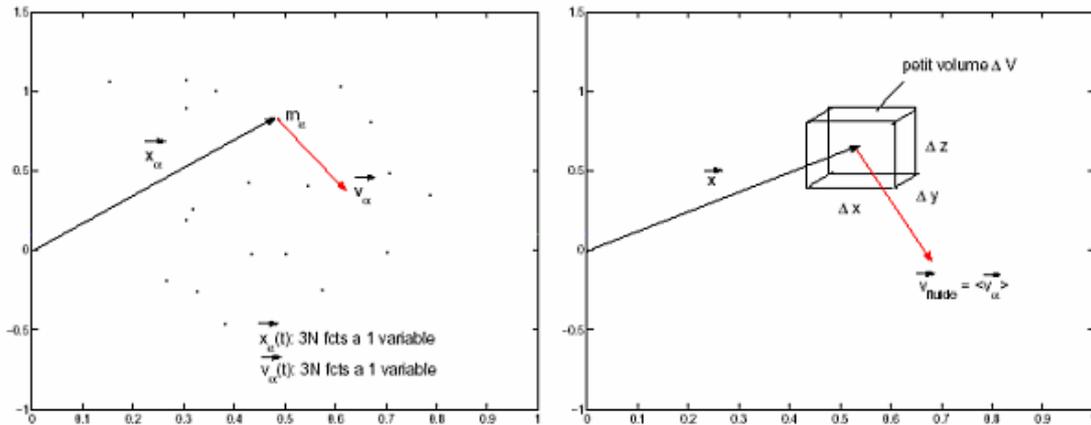
Dans un liquide comme dans un gaz, les molécules sont animées de mouvements désordonnés. Cependant, dans un liquide, les molécules sont distantes les unes des autres d'une longueur correspondant environ à leur taille, alors que dans un gaz les distances entre molécules sont très grandes par rapport à leur dimension. Les forces dites d'interaction moléculaire jouent donc un rôle important dans l'état liquide alors qu'elles n'interviennent que très peu dans l'état gazeux. Le modèle de gaz parfait, qui suppose que les molécules n'interagissent pas entre elles, rend compte assez convenablement des propriétés de la plupart des gaz.

Les liquides et les gaz se distinguent par leur compressibilité. On appelle coefficient de compressibilité le rapport de la diminution relative de volume à l'augmentation de pression, et ce à température constante. Ce paramètre a donc la dimension de l'inverse d'une pression. Les liquides ont des compressibilités très faibles (celle de l'eau, à une température de 20 °C, est de $4,4 \cdot 10^{-10}$), qui varient peu avec la pression et la température. Ainsi, un accroissement de pression de $2 \cdot 10^{15}$ Pa se traduit par une diminution de volume de l'eau égale à un dix millième du volume initial, soit, pour donner un ordre d'idée, $0,1 \text{ cm}^3$ pour 1 L. Pour les gaz, le coefficient de compressibilité varie plus : à une pression voisine de la pression atmosphérique normale, la compressibilité de l'air est 20 000 fois plus grande que celle de l'eau.

Admettre qu'un fluide est incompressible revient à dire que sa masse volumique est constante. Le plus souvent, les liquides sont considérés comme des fluides incompressibles. En revanche, l'étude d'un gaz demande de prendre en compte sa compressibilité ; il existe cependant des conditions dans lesquelles un écoulement gazeux peut être assimilé à un écoulement incompressible (lorsque la vitesse de l'écoulement est très petite par rapport à celle du son).

2 – Grandeur moyenne locale, particule fluide :

Une particule de fluide est un élément de volume de fluide de dimension mésoscopique (de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}^3$). Le vecteur vitesse de cette particule est la moyenne statistique des vecteurs vitesses des molécules qui la constituent. Le mouvement du fluide dans un référentiel (R) est alors décrit par l'ensemble des vecteurs vitesses de ses particules.



Du monde des particules (à gauche) au monde fluide (à droite)

3 – Contraintes dans les fluides :

Les diverses couches d'un fluide en mouvement ne peuvent pas glisser librement les unes sur les autres : tout se passe comme si des frottements au sein du fluide s'opposaient aux mouvements relatifs des lignes de courant voisines. Cette résistance au glissement ou à la déformation caractérise la viscosité d'un fluide ; elle est la propriété inverse de la fluidité. Cette viscosité, dite dynamique, s'exprime comme le quotient d'une masse par une vitesse (l'unité est le poiseuille) ; en règle générale, elle dépend fortement de la température - celle des liquides diminue avec la température, alors que celle des gaz croît - et elle se révèle très peu sensible à la pression. On mesure la viscosité dynamique d'un fluide, généralement liquide, à l'aide d'un viscosimètre. Le principe consiste en une comparaison entre le temps mis par le fluide pour s'écouler dans un tuyau vertical sur une distance donnée et celui mis par un fluide de référence (l'eau par exemple). Connaissant la densité des deux fluides, on en déduit la viscosité.

On appelle fluide non visqueux, ou fluide parfait, un fluide dont l'écoulement se fait « sans frottements internes » d'aucune sorte. Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci. Une des caractéristiques principales de la mécanique des fluides apparaît ici : pour représenter des faits ou des observations, elle fait appel à des modèles, dont le degré de raffinement est variable. En raison de l'extrême complexité des phénomènes qu'elle tente de décrire, elle ne peut se passer de tests expérimentaux (réalisation de maquettes testées dans un bassin et qui serviront à la conception des navires ; essais en soufflerie pour la construction aéronautique, etc...).

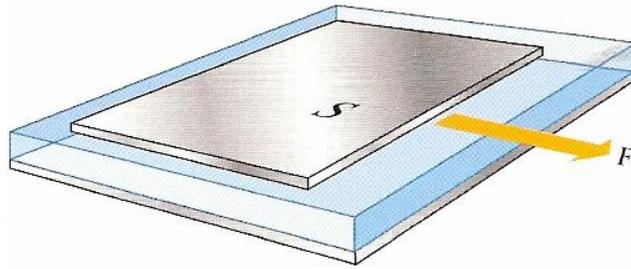
Forces de viscosité :

On étudie un cas simple où les plans parallèles à (Oxz) glissent les uns sur les autres (voir figures). Ce cas est une bonne approximation de la réalité lorsque les dimensions de l'écoulement selon (Ox) et (Oz) sont grandes vis-à-vis de l'épaisseur de la couche de fluide.

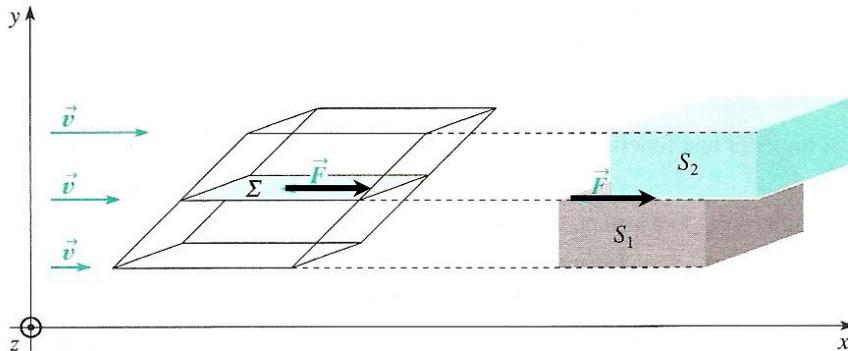
On suppose que le vecteur vitesse peut s'écrire sous la forme (voir figure) :

$$\vec{v} = v(y, t)\vec{u}_x \quad (y \text{ représente la cote verticale})$$

Comme $div(\vec{v}) = 0$, cet écoulement peut être celui d'un fluide incompressible.



Une plaque de surface S que l'on traîne sur une couche de liquide visqueux. La plaque se déplace à une vitesse constante et entraîne le liquide avec elle.



La vitesse est ici une fonction croissante de y . La force de cisaillement \vec{F} exercée par S_2 sur S_1 s'oppose à la déformation du système constitué par S_1 et S_2 .

Considérons deux éléments de fluide S_1 et S_2 , séparés par la surface Σ , d'aire S et normale à (Oy) .

La force de cisaillement, exercée par S_2 sur S_1 , est tangente à Σ . Dans le cas de la figure, la surface S_2 va plus vite que la surface S_1 et va donc l'entraîner avec elle.

Cette force est donc :

- Proportionnelle à l'aire S de la surface Σ .
- De même sens que \vec{u}_x si $v(y,t)$ est une fonction croissante de y

Si la force de cisaillement est une fonction linéaire de la dérivée $\frac{\partial v}{\partial y}$, le fluide est dit newtonien

(voir les compléments sur les fluides non newtoniens et la rhéologie). On se placera dans le cadre de cette hypothèse dans la suite du cours.

Conclusion :

Pour un écoulement unidirectionnel, tel que $\vec{v} = v(y,t)\vec{u}_x$, la force de surface tangentielle \vec{F} , appelée force de cisaillement ou de viscosité, qui s'exerce à travers une surface d'aire S normale à \vec{u}_y vaut (il s'agit de la force exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure) :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S \vec{u}_x$$

La viscosité a pour effet, dans un écoulement unidirectionnel, d'accélérer les éléments lents et de freiner les éléments rapides. Il s'agit donc d'un transfert interne de quantité de mouvement, qui présente les caractéristiques d'une diffusion de quantité de mouvement.

Le coefficient η , appelé coefficient de viscosité du fluide, peut être, avec une bonne approximation, considéré comme une constante caractéristique du fluide à une température donnée.

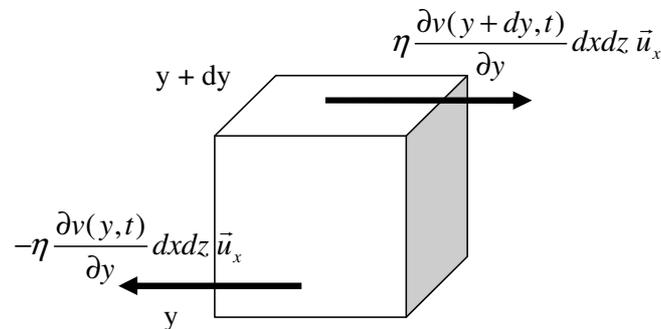
L'unité pour le coefficient de viscosité est le poiseuille (symbole Pl, égal à 1 Pa.s).

Quelques exemples (dans les conditions normales) :

Corps pur	Eau	Air	Glycérine
Viscosité	$1,0 \cdot 10^{-3}$ Pl	$1,0 \cdot 10^{-5}$ Pl	1,4 Pl

Equivalent volumique des forces de viscosité :

On considère un « pavé » de fluide de volume $dx dy dz$.



On suppose que le champ des vitesses peut encore s'écrire sous la forme :

$$\vec{v} = v(y, t) \vec{u}_x \quad (\text{écoulement incompressible, } \text{div}(\vec{v}) = 0)$$

Pour un tel champ, les forces de viscosité sont portées par l'axe (Ox) et seules les faces y et y + dy sont concernées. On peut écrire, en appliquant le principe de l'action et de la réaction, la résultante des forces de viscosité sur le pavé de fluide :

$$d\vec{F}_{vis} = d\vec{F}_{vis}(y + dy) + d\vec{F}_{vis}(y) = \eta \frac{\partial v(y + dy, t)}{\partial y} dx dz \vec{u}_x - \eta \frac{\partial v(y, t)}{\partial y} dx dz \vec{u}_x$$

Soit :

$$d\vec{F}_{vis} = \eta \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} dx dy dz \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad \vec{f}_{vis} = \frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

Pour un champ des vitesses quelconque mais correspondant à un écoulement incompressible (donc $\text{div}(\vec{v}) = 0$), nous admettons que ce résultat se généralise sous la forme :

$$\vec{f}_{vis} = \frac{d\vec{F}_{vis}}{d\tau} = \eta \Delta \vec{v} = \eta \begin{vmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{vmatrix}$$

Remarque :

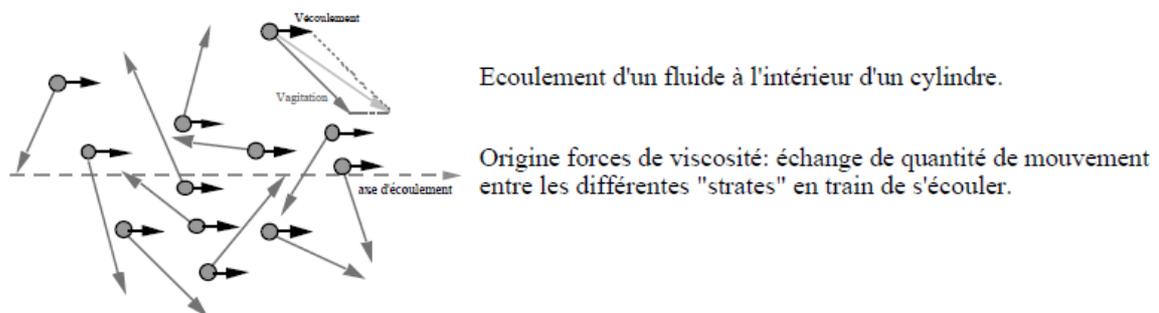
* \vec{f}_{vis} est la densité volumique des forces de viscosité ; elle n'est qu'un équivalent mathématique car ces forces ne s'appliquent qu'à la surface d'un système.

* L'expression de la densité volumique des forces de viscosité n'est donc valable que pour un fluide incompressible. La possibilité de variation du volume d'une particule de fluide au cours de son mouvement, sous l'effet du champ de pression ou de température, introduit un terme supplémentaire qui a pour expression $(\eta + \eta') \overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}))$, où η' est la viscosité de volume (ou deuxième viscosité). Comme dans la suite du cours on n'utilisera que des fluides parfaits (donc de viscosités nulles) ou des fluides visqueux incompressibles, ce coefficient η' ne sera jamais pris en compte.

Interprétation microscopique de la viscosité, transfert de quantité de mouvement :

La force de viscosité est nulle si le champ des vitesses est uniforme et tend à homogénéiser le champ des vitesses dans le cas contraire. La viscosité est un phénomène de transport diffusif de la quantité de mouvement horizontale.

Le transfert diffusif de quantité de mouvement (qui elle est horizontale) se fait selon \vec{u}_y .



On note $\rho \vec{v} = \rho v(y,t) \vec{u}_x$ la densité volumique de quantité de mouvement, où ρ désigne la masse volumique du fluide que l'on suppose constante.

La force de cisaillement (ou de viscosité) peut s'écrire :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S \vec{u}_x = \frac{\eta}{\rho} S \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \vec{u}_x$$

Cette force désigne la force subie par la couche inférieure due à la couche supérieure. Ainsi, si $v(y,t)$ est une fonction croissante de y , $\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} > 0$ et la couche inférieure reçoit donc une quantité

de mouvement donnée par la loi de Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{diff}}{dt}$.

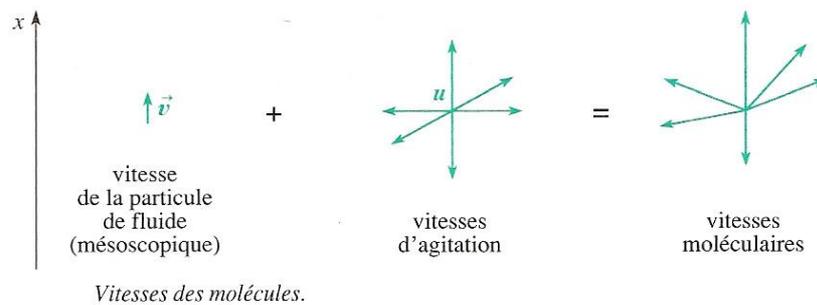
Par conséquent, dans un champ de vitesses inhomogène, les forces de viscosité produisent un transfert de quantité de mouvement des zones rapides vers les zones lentes, qui tend à rétablir l'homogénéité de la vitesse dans l'écoulement.

Modèle microscopique sommaire pour les gaz :

Ce modèle étant très simplifié, nous retrouverons bien une force proportionnelle à S et à $\frac{\partial v}{\partial y}$, mais il ne faut pas en attendre mieux qu'un ordre de grandeur de la valeur de la viscosité.

Description du modèle :

- Le gaz est supposé à l'équilibre thermodynamique : la pression P et la température T sont uniformes. n représente la densité moléculaire, ou nombre de molécules par unité de volume, et m la masse d'une molécule.
- Le champ de vitesse moyenne est de la forme $\vec{v} = v(y) \vec{e}_x$ (vitesse d'une particule de fluide, ou vitesse mésoscopique).
- On suppose, pour simplifier, que la vitesse d'agitation \vec{u} a la même norme u pour toutes les molécules, et que sa direction ne peut être que parallèle aux axes. Cette agitation étant répartie uniformément dans les six directions possibles, la vitesse totale des molécules est :
 - $v(y) \vec{e}_x + u \vec{e}_x$ pour 1/6 d'entre elles ;
 - $v(y) \vec{e}_x - u \vec{e}_x$ pour 1/6 d'entre elles ;
 - $v(y) \vec{e}_x + u \vec{e}_y$ pour 1/6 d'entre elles, etc.
- Si l est le libre parcours moyen, nous supposons que les molécules traversent la surface Σ d'abscisse y avec la vitesse qu'elles ont acquise en $y - l$ (ou en $y + l$ selon le sens du transfert).



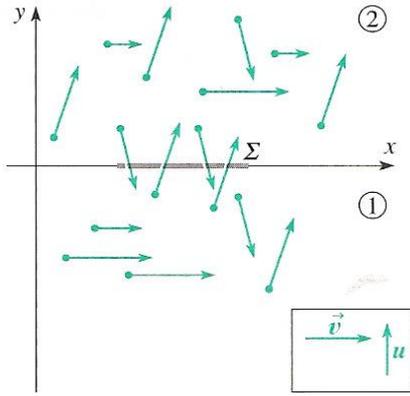
Les deux parties de fluide, délimitées par Σ , échangent des molécules dont la vitesse est légèrement différente. Cet échange correspond globalement à un transfert de quantité de mouvement.

Débit moléculaire :

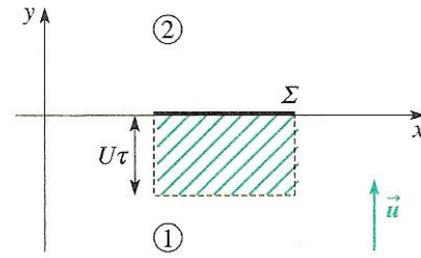
Soit $D_{N_{1 \rightarrow 2}}$ le débit moléculaire de la région ① vers la région ②, c'est-à-dire le nombre de molécules traversant Σ par unité de temps, dans le sens des y croissants. Les N molécules traversant Σ pendant τ sont contenues dans un cylindre de base S et de hauteur $u\tau$, et une molécule sur six possède la bonne direction

$$N = \frac{1}{6} n S u \tau \quad \text{et} \quad D_{N_{1 \rightarrow 2}} = \frac{1}{6} n S u .$$

Le fluide étant à l'équilibre thermodynamique, n et u sont homogènes, et $D_{N_{1 \rightarrow 2}} = D_{N_{2 \rightarrow 1}}$.



a. Le débit moléculaire $D_{N_{1 \rightarrow 2}}$ à travers Σ correspond aux particules dont la vitesse \vec{v} est parallèle à y et de même sens.



b. Les N molécules traversant Σ de la région ① vers la région ② pendant le temps τ sont dans le volume hachuré de base S et de hauteur $u\tau$.

Débit de quantité de mouvement :

Les molécules transférées de la région ① vers la région ② possèdent une quantité de mouvement de composante $p_{x_1} = m v(y-l)$.

Pour celles qui suivent le chemin inverse $p_{x_2} = m v(y+l)$.

Le débit de quantité de mouvement résultant de ces deux transferts en sens opposé est égal à la force de cisaillement :

$$D_{p_x} = F_{\text{cis}} = D_{N_{1 \rightarrow 2}} (p_{x_1} - p_{x_2}) = \frac{1}{6} m n S u (v(y-l) - v(y+l)).$$

La vitesse v des particules de fluide variant très peu sur une distance de l'ordre du libre parcours moyen l , on effectue un développement à l'ordre 1, et on obtient :

$$F_{\text{cis}} = -\frac{1}{3} n m u l \frac{dv}{dy} S.$$

Viscosité d'un gaz :

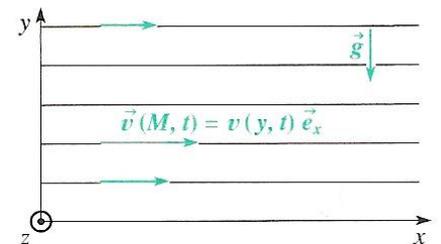
Ce modèle sommaire nous fournit donc une valeur de η :

$$\eta = \frac{1}{3} m n u l.$$

• Le libre parcours moyen est de l'ordre de $\frac{l}{n\sigma}$, où σ représente la section efficace de choc

• Si nous identifions u à la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$, nous obtenons une expression de η : $\eta \approx \frac{1}{N_A \sigma} \sqrt{\frac{RTM}{3}}$, N_A étant le nombre d'AVOGADRO.

Pour l'air, si nous assimilons chaque molécule à une sphère de rayon a voisin de $3,5 \cdot 10^{-10}$ m, σ s'écrit $\sigma = \pi a^2$. Dans ce cas à 20°C , nous trouvons $\eta \approx 10^{-5}$ PI, valeur voisine de la valeur expérimentale ($1,8 \cdot 10^{-5}$ PI).



Écoulement d'un fluide visqueux incompressible donc les lignes de courant sont parallèles à (Ox) .

II) Champ des vitesses dans un fluide :

1 – Description lagrangienne, description eulérienne :

- **Description lagrangienne : (Lagrange, 1736 – 1813)**

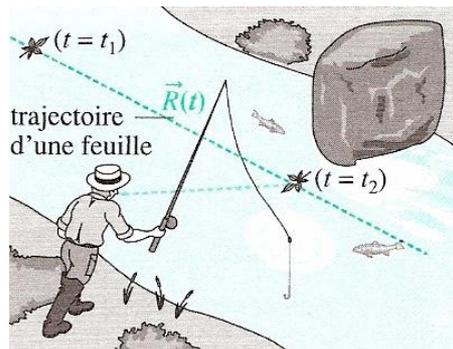
A un instant initial t_0 , on découpe le fluide en particules de fluides élémentaires centrées sur un ensemble de points courants M_0 et on suit le mouvement de ces particules au cours du temps dans le référentiel (R).

A un instant t , on peut ainsi définir le vecteur vitesse $\vec{v}(M_0, t)$ de la particule qui était en M_0 à l'instant t_0 .

On définit naturellement la trajectoire d'une particule de fluide, lieu des positions successives de cette particule au cours du temps.

Dans ce point de vue, un observateur est lié à chaque particule de fluide. Ce type de description est utile lorsqu'on veut étudier les phénomènes d'advection¹ de contaminants, comme des éléments radioactifs disséminés dans des écoulements et qui suivent les trajectoires des particules de fluides.

C'est cette description qui est choisie traditionnellement en mécanique du point matériel ou du solide par exemple.



Le pêcheur suivant des yeux les feuilles se place en formalisme lagrangien.

En guise d'illustration, un policier qui veut vérifier qu'une voiture particulière ne commet pas d'excès de vitesse choisira de suivre cette voiture et d'en mesurer la vitesse avec un radar embarqué. Si le policier est plutôt préoccupé par le respect de la limitation de vitesse à un carrefour dangereux, il y posera son radar et contrôlera la vitesse de toutes les voitures qui passeront à cet endroit : c'est l'approche eulérienne d'un écoulement.

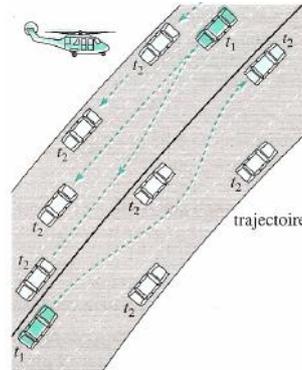
De manière plus précise, le fluide est décrit à chaque instant par l'ensemble des vitesses des particules de fluide qui le composent ; on note \vec{R}_0 leur position initiale (à l'instant $t = 0$). La vitesse d'une particule est alors :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{V}(\vec{R}_0, t)$$

où $\vec{R}(t) = \overrightarrow{OM}$ est le rayon vecteur de la particule à l'instant t .

¹ Les transports d'un point à un autre se font soit par **advection** soit par **diffusion**. Imaginons des poissons dans une rivière. Le mouvement général de l'eau assure le transport advectif des poissons. Le mouvement des poissons par rapport à l'eau (par exemple en se repérant sur une feuille morte dérivant dans le courant) est le transport diffusif.

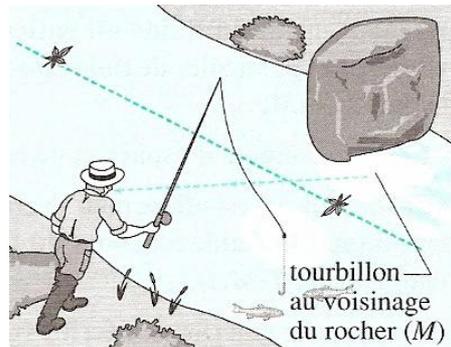
Ces grandeurs ne dépendent explicitement que du temps pour une particule considérée ($\vec{R}(t)$ est une fonction connue du temps). Ainsi, en formalisme lagrangien, la vitesse de chaque particule ne dépend que du temps t (la trajectoire étant connue) et des coordonnées initiales de la particule.



Lorsque l'on observe les trajectoires des divers véhicules (entre $t = t_1$ et $t = t_2$), on se place en formalisme lagrangien.

- **Description eulérienne : (Euler, 1707 – 1783)**

Plutôt que de décrire la vitesse d'une particule de fluide, ce qui fournit des caractéristiques de l'écoulement en fonction du temps mais jamais aux mêmes endroits (la position de la particule ne cesse de varier), la description eulérienne consiste à étudier le mouvement du fluide à des endroits fixes. Il existe de nombreuses techniques expérimentales permettant de mesurer la vitesse d'un fluide en une position donnée (comme le « fil chaud » qui permet d'obtenir la vitesse du fluide en mesurant le refroidissement d'un fil chauffé, ou l'anémomètre constitué d'une hélice dont la vitesse de rotation donne la vitesse du vent, ...). Ainsi, on peut suivre l'évolution temporelle de la vitesse en un point M fixe : on obtient la vitesse de la particule de fluide qui se trouve en M à l'instant t de la mesure. Il s'agit donc à chaque fois d'une particule différente.



Le pêcheur observe comment s'écoule le fluide autour du rocher : il se place en formalisme eulérien.

L'ensemble des vecteurs vitesse des particules forme un champ de vecteurs :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(M, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$$

dépendant à la fois de l'espace et du temps : les variables d'espace (x, y, z) et le temps t sont des variables indépendantes.

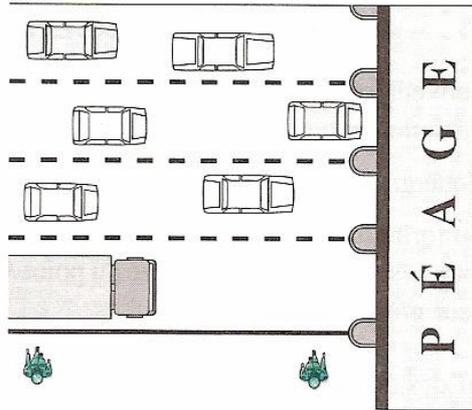
L'approche eulérienne décrit l'état d'un fluide en mouvement en lui associant des champs : champ des vitesses, champ de pression, champ de température, ...

Le point de vue eulérien est le point de vue implicitement adopté en électromagnétisme et en thermodynamique sur les phénomènes de diffusion.

La description eulérienne est particulièrement adaptée dans le cas des écoulements stationnaires. Un écoulement stationnaire (ou écoulement en régime permanent) est un écoulement pour lequel la vitesse en tout point M est indépendante du temps :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M) = \vec{0}$$

Dans un écoulement stationnaire, la vitesse est constante en tout point fixe mais la vitesse des particules de fluide varie, sauf exception, avec le temps. Ainsi, un écoulement stationnaire eulérien n'est pas un écoulement stationnaire lagrangien.



Les deux gendarmes observant les vitesses des véhicules se sont placés en formalisme eulérien pour décrire l'écoulement du trafic. A la même date t, ils n'observent pas les mêmes véhicules.

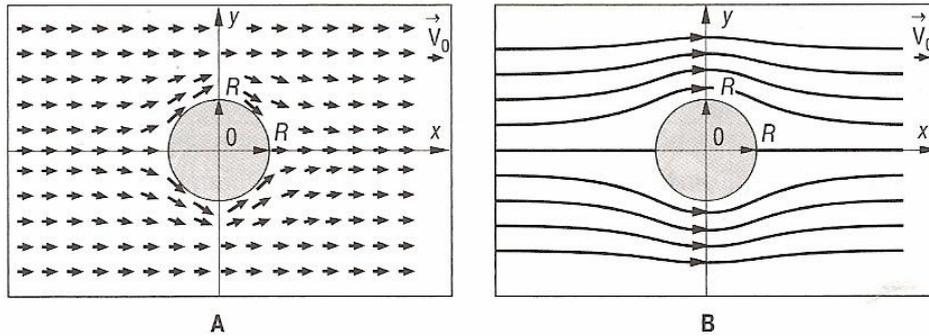
Le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel choisi. Prenons le cas du sillage d'un canard à la surface d'une rivière : ce sillage, qui donne l'impression de suivre le canard est stationnaire dans le référentiel lié au canard mais n'est pas stationnaire dans le référentiel lié à la berge.

2 – Champ de vitesse, lignes de courant et trajectoires :

La carte du champ des vitesses donne une représentation graphique d'un écoulement. Cette carte est le tracé du vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ en tout point M à un instant donné t. A titre d'exemple, on considère l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe, de rayon R, infini dans la direction (Oz) perpendiculaire au plan de la feuille, d'un fluide parfait (viscosité nulle) ayant une vitesse uniforme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ loin du cylindre. Le calcul du vecteur vitesse $\vec{v}(x, y) = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ conduit à (voir paragraphe 6) :

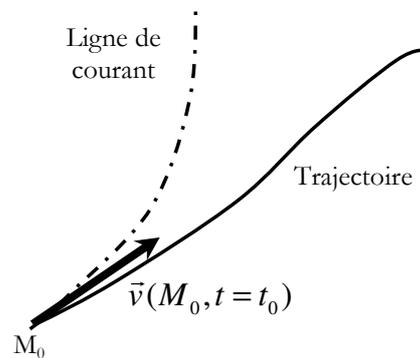
$$v_x = \left[1 + \frac{(y^2 - x^2) R^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] v_0 \quad ; \quad v_y = -2 \frac{xy R^2}{(x^2 + y^2)^2} v_0$$

Une représentation de l'écoulement souvent utilisée est celle des lignes de courants : ces lignes sont les courbes tangentes au vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ en chacun de leurs points M, à l'instant considéré. L'équation d'une ligne de courant (comparable à une ligne de champ en électrostatique) s'obtient en écrivant que tout vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long de la ligne est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$, soit $\vec{v}(M, t) \wedge d\vec{r} = \vec{0}$.



Cylindre fixe : champ des vitesses (à gauche) et lignes de courants (à droite), confondues avec les trajectoires des particules de fluide.

Dans le cadre de la description lagrangienne, on obtient directement les trajectoires des particules de fluide ; expérimentalement, on obtient ces trajectoires en suivant le déplacement de traceurs.



Ligne de courant à l'instant t_0 et trajectoire passant par le point M_0 à l'instant t_0 .

Mathématiquement, une trajectoire s'obtient par l'intégration (avec des CI : M_0 et t_0) de l'équation :

$$d\vec{r} = \vec{V}(\vec{R}_0, t) dt$$

On peut remarquer que cette équation implique $d\vec{r} \wedge \vec{V}(\vec{R}_0, t) = \vec{0}$.

En général, les trajectoires et les lignes de courant ne sont pas confondues.

Dans le cas des écoulements stationnaires :

$$\vec{V}(\vec{R}_0, t) = \vec{V}(\vec{R}(t)) = \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(M)$$

et cette relation donne également la forme des lignes de courant. En conclusion : trajectoires et lignes de courant sont identiques pour les écoulements stationnaires (c'est le cas dans la figure précédente).

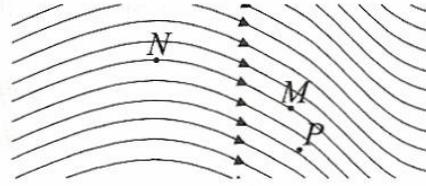
Compléments :

*** Lignes de courant :**

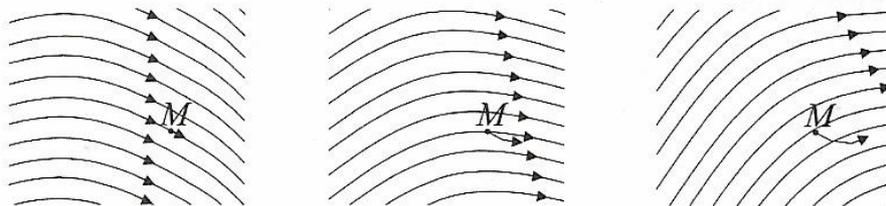
En description eulérienne, l'obtention du champ de vitesse permet d'avoir à un instant donné une connaissance globale de l'écoulement. On le visualise en traçant les lignes de courant, c'est-à-dire les lignes de champ de $\vec{v}(x, y, z, t)$. Elles sont par définition tangentes en chacun de leur point au champ de vitesse et sont donc définies par l'équation différentielle :

$$\vec{v} \wedge d\vec{l} = \vec{0}.$$

Elles représentent un état instantané du fluide et ne s'identifient donc pas aux trajectoires individuelles qui sont des courbes obtenues par juxtaposition de positions occupées à différents instants. Ainsi, sur la figure ci-contre, la connaissance du champ de vitesse à l'instant choisi ne permet pas de dire que la particule fluide qui passe par le point M suit au cours du temps la courbe qui contient également les points N et P . Cela supposerait en effet que la connaissance d'un certain état initial du fluide suffit pour prédire son évolution ultérieure ou antérieure, sans le besoin d'informations sur les forces qui s'y exercent. C'est contraire aux lois de la Mécanique.



Si on voulait obtenir une trajectoire à partir des lignes de courant, il faudrait prendre une série de « clichés » instantanés de l'écoulement et les superposer. On verrait ainsi la déformation progressive des lignes de courant au cours du temps et, en raccordant bout à bout de petits segments tangents aux lignes de courant sur des « clichés » successifs, on construirait des courbes nouvelles qui seraient cette fois les trajectoires individuelles. C'est ce que l'on a fait sur la figure de la page suivante. Sur le premier « cliché » d'un écoulement, on a reporté le petit déplacement d'une particule fluide passant au point géométrique M pendant la durée qui le sépare du second « cliché ». Sur celui-ci, on a reporté de même le petit déplacement suivant de la même particule fluide pendant la durée qui le sépare du troisième « cliché ». Enfin, sur ce dernier, on a reporté le petit déplacement de cette particule fluide pendant la durée qui le sépare du quatrième « cliché » (non représenté). On voit déjà ainsi que la trajectoire construite de cette façon par petits segments ne coïncidera avec aucune ligne de courant et peut être fort différente.

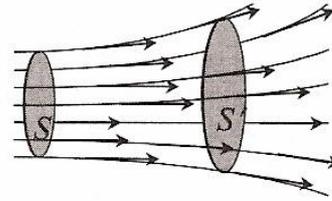


Pour qu'il y ait coïncidence, il faut que, d'un « cliché » au suivant, les lignes de courant restent inchangées, c'est-à-dire que le champ de vitesse soit identique à lui-même au cours du temps. Mais il est très peu vraisemblable que seule la vitesse devienne indépendante du temps. Ce sont toutes les propriétés du fluide, locales et globales, qui doivent adopter le même comportement stationnaire. Toutes les dérivées eulériennes sont alors nulles. On parle d'écoulement permanent ou stationnaire. C'est seulement dans ce cas que les lignes de courant représentent les trajectoires réellement suivies par les particules fluides.

* *Tube de champ :*

Comme pour toute famille de lignes de champ, deux lignes de courant ne peuvent pas se croiser (alors que des trajectoires le peuvent). Elles se rejoignent éventuellement en un point singulier, lequel constitue alors un point d'arrêt des deux lignes, mais c'est une situation marginale.

On peut donc définir des tubes de champ. On les appelle ici tubes de courant. Il s'agit de volumes engendrés par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour. Le flux du champ de vitesse à travers la surface latérale d'un tube de courant est nul par définition et son flux total à travers la surface fermée obtenue en limitant le tube par deux sections droites S et S' est par conséquent seulement égal à la somme des flux sur celles-ci. Si on appelle $\langle v \rangle$ et $\langle v' \rangle$ des vitesses caractéristiques moyennes au niveau de ces sections, ce flux total s'écrit :

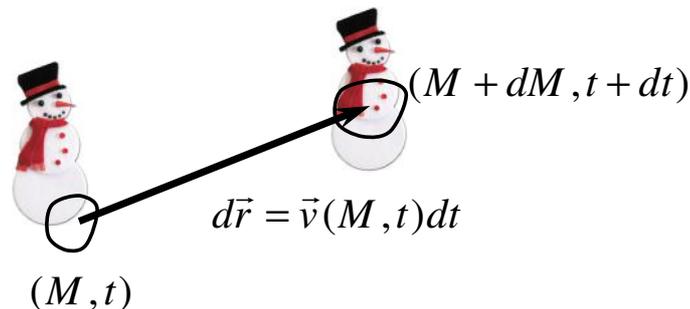


$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{S'} \vec{v} \cdot \vec{n}' d\Sigma = \langle v \rangle S - \langle v' \rangle S'.$$

Nous verrons au chapitre suivant que, lorsque le fluide peut être considéré comme incompressible, ce flux est nul. On a alors $\langle v \rangle S = \langle v' \rangle S'$, ce qui signifie que toute diminution de S , c'est-à-dire tout resserrement des lignes de courant, est associé à une augmentation de la vitesse.

3 – Dérivée particulière du champ des vitesses :

Imaginer un petit bonhomme sur une particule fluide (toujours la même) : les variations des grandeurs qu'il mesure (vitesse, pression, masse volumique, ...) sont des variations particulières, c'est-à-dire des variations de grandeurs liées à la même particule qui se déplace au cours du temps.



On comprend intuitivement que, pour étudier le mouvement d'une particule de fluide soumise à différentes forces, il va falloir déterminer son accélération.

Mais comment calculer l'accélération d'une particule de fluide en formalisme eulérien ?

La différentielle de la vitesse d'une particule de fluide (toujours la même) vaut :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

Pendant l'intervalle de temps dt , la particule de fluide s'est déplacée de :

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

D'où :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z dt$$

Et l'accélération de la particule de fluide devient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

Soit encore :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

En toute rigueur, \vec{v} dans le membre de gauche désigne la vitesse de la particule fluide (et d/dt est appelée dérivée particulaire, encore notée D/Dt) alors que dans les autres termes, \vec{v} désigne le champ des vitesses dans tout le fluide. Enfin, le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ permet de rendre compte que, même dans un écoulement stationnaire (dans le sens eulérien du terme), aux variations spatiales de la vitesse correspondent des accélérations pour les particules.

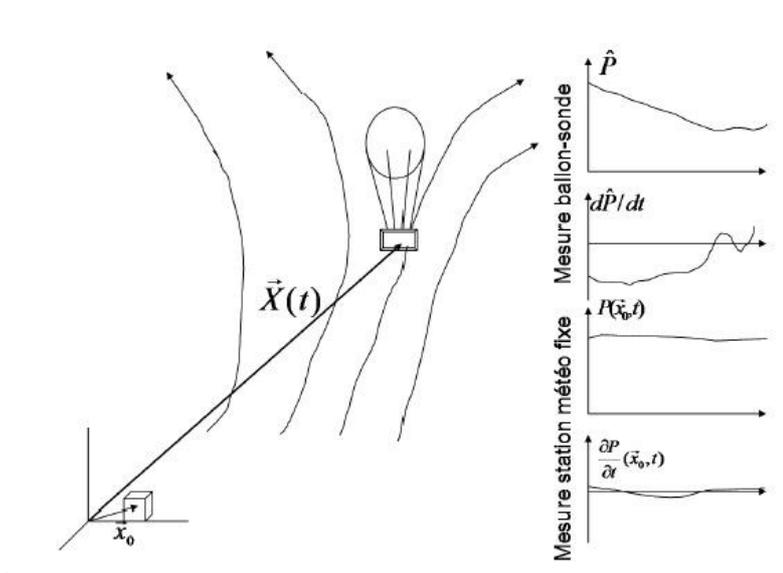
Généralisation :

La dérivée particulaire » d'une grandeur vectorielle \vec{G} est donnée par :

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G}$$

Cette dérivée particulaire se décompose en deux termes :

- * $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{G}$: la dérivée convective, qui indique un caractère non uniforme de \vec{G} .
- * $\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}$: la dérivée locale, qui indique un caractère non permanent de \vec{G} .



Pression mesurée par une station météo fixe, $P(\vec{x} = \vec{x}_0, t)$, pression mesurée par un ballon-sonde emporté par le vent, $\hat{P}(t) = P(\vec{x} = \vec{X}(t), t)$, et leurs variations temporelles respectives, $\frac{\partial P}{\partial t} \neq \frac{d\hat{P}}{dt}$.

Remarque :

On peut montrer que (se placer en coordonnées cartésiennes) :

$$(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = \overline{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overline{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Exemple d'un solide en rotation :

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz). Tout point M lié au solide possède un vecteur vitesse de la forme :

$$\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe (Oz) et r la distance du point M à l'axe de rotation. On calcule $\overline{\text{rot}}(\vec{v})$ en utilisant un formulaire d'analyse vectorielle :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\omega r^2) \vec{u}_z = 2\omega \vec{u}_z = 2\vec{\omega}$$

Remarque : pour un champ vectoriel de la forme $f(r)\vec{u}_\theta$:

$$\overline{\text{rot}}[f(r)\vec{u}_\theta] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf(r)) \vec{u}_z$$

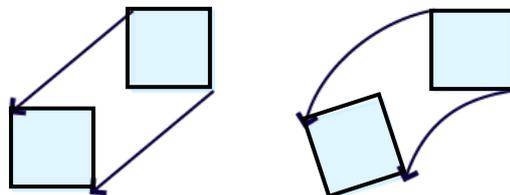
Le rotationnel de la vitesse en un point du solide renseigne donc sur la rotation de ce point autour de l'axe de rotation (Oz).

Le tourbillon, parfois appelé vorticité (du latin vortex), est une formulation mathématique de la dynamique des fluides reliée à la quantité de vitesse angulaire ou de rotation que subit un fluide localement. Une façon simple de visualiser le tourbillon est de considérer un fluide en mouvement dans lequel on délimite un petit volume rigide. Si cette parcelle tourne par rapport à un référentiel au lieu de translater, elle tourbillonne.

On définit alors, pour un fluide, le vecteur tourbillon par :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}}(\vec{v})$$

Ce vecteur représente le vecteur rotation (locale) d'une particule de fluide. Localement, le champ des vitesses d'un fluide renseigne sur l'existence de tourbillons dans ce fluide par l'intermédiaire de son rotationnel.



Translation simple à gauche, rotation à droite menant à du tourbillon

Un écoulement est dit non tourbillonnaire (ou irrotationnel) si le vecteur tourbillon est nul en tout point. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit tourbillonnaire.

Il ne faut pas confondre turbulences et tourbillons : un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_\theta$ est tourbillonnaire (comme on peut le vérifier en coordonnées cylindriques), mais il ne s'agit pas d'une turbulence.

On peut calculer le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \left[\frac{k}{r^2} \vec{u}_\theta \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{k}{r} \right) \vec{u}_z = -\frac{k}{2} \frac{1}{r^3} \vec{u}_z$$

La fonction mathématique qui décrit ce champ des vitesses est « simple ».

En pratique, les turbulences sont constituées de tourbillons de taille et de forme variables, qui se font et se défont constamment.

Structure tourbillonnaire (exemple de la tornade) :

Cette structure correspond à une situation bidimensionnelle où le fluide tourne autour de l'axe des z avec une vitesse orthoradiale $\vec{v} = v(r, \theta) \vec{u}_\theta$. On suppose le fluide incompressible. Alors :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{donc } v(r) \text{ ne dépend que de } r \text{ uniquement et pas de } \theta)$$

On peut calculer le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv(r)] \vec{u}_z$$

Une telle structure de champ des vitesses correspond donc à un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$. On pouvait s'y attendre en faisant l'analogie avec un solide en rotation autour de l'axe (Oz), ou encore par analogie avec le champ magnétique créé par un courant électrique à section circulaire de longueur infinie.

En effet, le champ des vitesses d'un fluide (incompressible) vérifie les équations locales :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\Omega}$$

Un champ magnétique permanent vérifie les équations de Maxwell :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

La source du champ magnétique est le vecteur \vec{j} , celle de \vec{v} le double du vecteur tourbillon, $2\vec{\Omega}$. Ainsi, si deux problèmes, l'un de magnétostatique, l'autre d'écoulement incompressible, présentent les mêmes symétries, les mêmes conditions aux limites et les mêmes répartitions de sources, alors les solutions (c'est-à-dire les expressions du champ \vec{B} et de la vitesse \vec{v}) seront formellement identiques.

On considère le cas idéal où :

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 & \text{pour } 0 < r < a \\ 0 & \text{pour } r > a \end{cases}$$

Alors, pour $0 < r < a$:

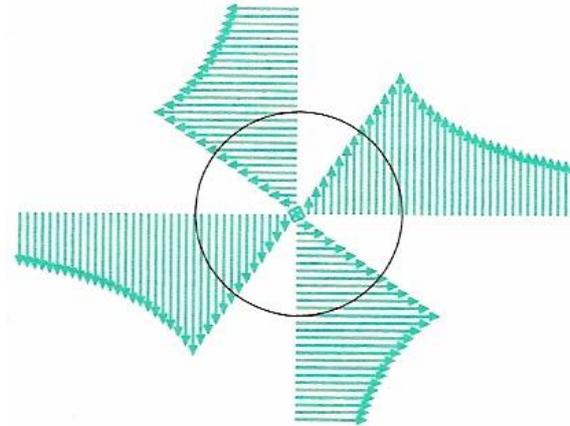
$$\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv(r)] = \omega_0 \quad \text{soit} \quad v(r) = \omega_0 r + \frac{C}{r}$$

La constante $C = 0$ sinon la vitesse serait infinie en $r = 0$: $v(r) = \omega_0 r$.

Pour $r > a$:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv(r)] = 0 \quad \text{soit} \quad v(r) = \frac{cste}{r} = \frac{\omega_0 a^2}{r}$$

On a utilisé la continuité de la vitesse en $r = a$ pour déterminer la constante d'intégration.



Champ des vitesses d'une tornade.

Remarques :

Le théorème de Stokes donne :

$$\oint_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \cdot \vec{n} dS = 2 \iint_{(S)} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$

On obtient l'équivalent du théorème d'Ampère en magnétostatique.

En prenant comme contour un cercle et comme surface celle de ce cercle, on obtient :

* Pour $r < a$:

$$2\pi r v(r) = 2\omega_0 \pi r^2 \quad \text{soit} \quad v(r) = \omega_0 r$$

* Pour $r > a$:

$$2\pi r v(r) = 2\omega_0 \pi a^2 \quad \text{soit} \quad v(r) = \frac{\omega_0 a^2}{r}$$

On retrouve les résultats précédents.

Cas d'un tourbillon « ponctuel » ou « vortex » :

La circulation de la vitesse sur une ligne de courant extérieure à l'œil de la tornade est $C = 2\pi a^2 \omega_0$. C'est donc une constante qui caractérise la tornade au même titre que la donnée de la vitesse angulaire ω_0 .

Le tourbillon est dit ponctuel (et nommé vortex) si $a \rightarrow 0$ tout en maintenant C constante (finalement, $\omega_0 \rightarrow \infty$).

Le champ des vitesses d'un vortex s'écrit :

$$v(r) = \frac{C}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (\text{avec } r \neq 0)$$

Au cas limite du vortex correspond, en magnétostatique, le cas d'un fil infini parcouru par le courant d'intensité $I = \pi a^2 j$, pour lequel le champ magnétique vaut $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$.

4 – Equation locale de conservation de la masse et conséquences :

a) Débit volumique, débit massique :

On appelle débit volumique D_v à travers une surface (S) orientée, le volume de fluide qui traverse (S) par unité de temps, compté positivement dans le sens du vecteur normal à la surface et négativement dans le cas contraire.

Ce débit vaut :

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

Le débit massique D_m correspond à la masse de fluide qui traverse (S) par unité de temps, compté positivement dans le sens du vecteur normal à la surface et négativement dans le cas contraire :

$$D_m = \iint_{(S)} \mu \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

avec $\vec{j} = \mu \vec{v}$ (vecteur densité de courant ou vecteur densité de flux de masse de l'écoulement).

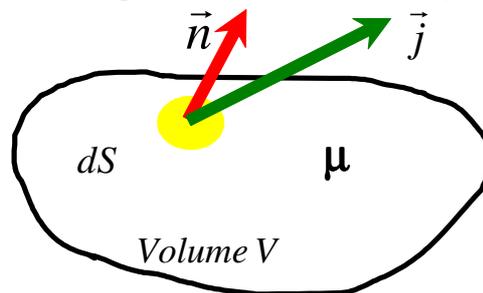
Si le fluide est incompressible et homogène, donc si la masse volumique est constante et indépendante du point, alors :

$$D_m = \mu D_v$$

On peut remarquer que ces débits sont les équivalents de l'intensité électrique, du flux thermique et du débit de particules (vu en diffusion).

b) Equation locale de conservation de la masse :

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).



Soit μ la masse volumique du fluide. La masse totale $M(t)$ comprise dans le volume à l'instant t vaut : $M(t) = \iiint_{(V)} \mu \, d\tau$

La conservation de la masse permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \mu(M, t) \, d\tau \right) = - \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \mu(M, t) d\tau \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} d\tau$$

Finalement, le principe de conservation de la masse conduit à $\iiint_{(V)} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} d\tau = -\iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} d\tau = -\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{j} d\tau \quad \text{soit} \quad \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) d\tau = 0$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V), il vient :

$$\frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

C'est l'équation locale de conservation de la masse.

Conséquences pour les écoulements stationnaires : le flux de \vec{j} est conservatif ($\operatorname{div} \vec{j} = 0$). Il en résulte que :

* Le débit massique sortant d'une surface fermée est nul

* Le débit massique à travers toute section d'un tube de courant est le même à un instant donné.

5 – Interprétation de la divergence de la vitesse, cas particuliers des écoulements incompressibles :

On peut écrire l'équation locale de conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overline{\operatorname{grad} \mu} = 0$$

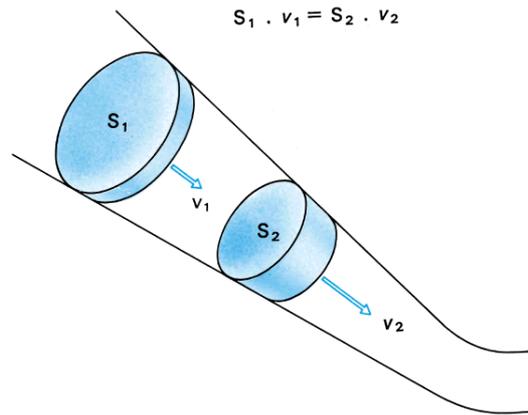
Soit, en faisant apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique :

$$\mu \operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{D\mu}{Dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt}$$

Soit une particule de fluide située au point M à l'instant t et m sa masse. Soient V(t) et V(t + dt) son volume aux instants t et t + dt. Alors, avec $\mu = m/V$:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt} = -\frac{V}{m} \frac{D}{Dt} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{V(t+dt) - V(t)}{V(t) dt}$$

On voit ainsi l'interprétation de $\operatorname{div}(\vec{v})$: c'est une mesure en chaque point du taux d'accroissement relatif du volume de la particule de fluide au cours du temps.



Pour un écoulement incompressible, $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ et ainsi $div(\vec{v}) = 0$. On en déduit que le débit volumique se conserve dans un tube de champ et donc concrètement dans une canalisation. En particulier, si la vitesse est constante sur une section de la canalisation :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Ainsi, lorsque les lignes de champ d'un écoulement se resserrent, la norme du vecteur vitesse augmente.

6 – Ecoulements non tourbillonnaires, potentiel des vitesses :

Un écoulement non tourbillonnaire est tel qu'en tout point de l'espace :

$$\overline{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

On peut alors définir (à une constante près) un potentiel des vitesses, noté Φ , par :

$$\vec{v} = \overline{grad}\Phi$$

Si l'écoulement est de plus incompressible :

$$div(\vec{v}) = 0 \quad \text{donc} \quad div(\overline{grad}\Phi) = \Delta\Phi = 0$$

Le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace (vue en électrostatique pour le potentiel électrique), $\Delta\Phi = 0$.

* Analogie électrostatique :

Les définitions précédentes en rappellent d'autres vues en électrostatique : un champ électrostatique \vec{E} est tel que $\overline{rot}\vec{E} = \vec{0}$. Il lui est associé un potentiel électrostatique V tel que $\vec{E} = -\overline{grad}V$.

Dans une région vide de charges, $div\vec{E} = \vec{0}$. Dans cette région le potentiel obéit alors également à l'équation de LAPLACE $\Delta V = 0$.

Les lignes de champ de \vec{E} sont perpendiculaires aux équipotentielles.

Il existe alors une nouvelle analogie formelle liant cette fois le champ des vitesses du fluide à un champ électrostatique.

• **Champ des vitesses d'un fluide en écoulement potentiel (non tourbillonnaire et incompressible) :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \vec{0}, \text{ d'où il existe } \phi \text{ tel que } \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi. \\ \vec{v} &\text{ est orthogonale aux surfaces } \phi = \text{cte}. \\ \text{div} \vec{v} &= \vec{0}, \text{ soit } \Delta \phi = 0. \end{aligned}$$

• **Champ électrostatique dans une région vide de charges :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{0}, \text{ d'où il existe } V \text{ tel que } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V. \\ \vec{E} &\text{ est orthogonal aux surfaces } V = \text{cte}. \\ \text{div} \vec{E} &= \vec{0}, \text{ soit } \Delta V = 0. \end{aligned}$$

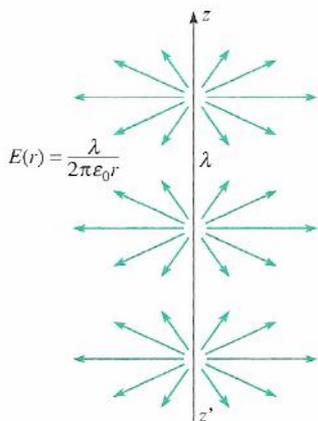
Par conséquent, deux problèmes associés présentant les mêmes caractéristiques géométriques et les mêmes conditions aux limites auront la même solution formelle. Illustrons ce résultat sur divers exemples.

Exemple d'une source et d'un puits bidimensionnels :

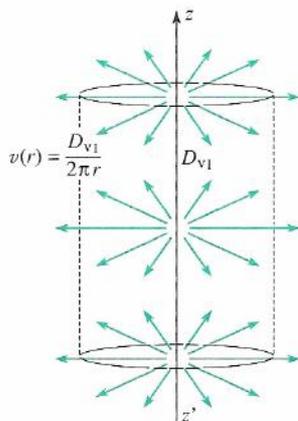
Le problème du calcul du champ électrostatique \vec{E} créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé avec la densité linéique λ est classique.

L'application du théorème de GAUSS à un cylindre de rayon r et de hauteur h quelconque aboutit à

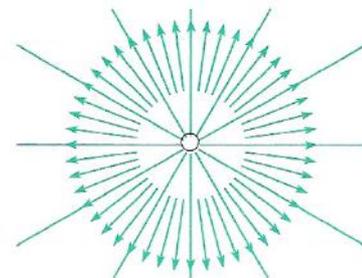
$$2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}, \text{ soit } E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}.$$



champ \vec{E} créé par un fil infini uniformément chargé



champ \vec{v} créé par une source infinie de débit linéique uniforme



Champ des vitesses d'une source bidimensionnelle.

L'écoulement potentiel analogue de la dynamique des fluides doit avoir un champ

des vitesses du fluide (figures) de la forme $\vec{v} = \frac{k}{r} \vec{e}_r$ avec $\text{div} \vec{v} = \vec{0}$.

Caractérisons plus concrètement cet écoulement potentiel. La vitesse du fluide tend vers 0 quand r tend vers l'infini : le fluide est au repos « infiniment loin » de l'axe (Oz). Le flux de \vec{v} est bien conservé à travers tout cylindre de hauteur h et de rayon r : $\Phi = 2\pi r h v(r) = 2\pi h k$.

Ce flux non nul semble en contradiction avec $\text{div} \vec{v} = \vec{0}$. Une fois encore, la vitesse n'est pas définie en $r = 0$, l'axe (Oz) constituant un ensemble de points singuliers. En fait, de même que le fil chargé constitue la source du champ électrostatique,

l'axe (Oz) est à l'origine de l'écoulement considéré : il faut le considérer comme émettant ou recevant du fluide. Le flux de \vec{v} à travers un cylindre de rayon r quelconque et de hauteur h constitue alors une caractéristique de l'écoulement.

Ce flux représente un débit volumique par unité de longueur de l'axe (Oz), noté D_{vl} et joue un rôle analogue à celui de la densité de charge λ dans le modèle électrostatique :

$$\Phi = hD_{vl} = 2\pi h k, \text{ soit } \vec{v} = \frac{D_{vl}}{2\pi r} \vec{e}_r.$$

La carte d'écoulement est identique dans tout plan orthogonal à l'axe (Oz) : suivant que D_{vl} est positif ou négatif, cet axe est qualifié de source ou puits bidimensionnel. Un fin tuyau d'arrosage percé d'une multitude de petits trous uniformément répartis sur sa surface donne une bonne image de la source étudiée.

À cet écoulement potentiel correspond un potentiel des vitesses ϕ tel que :

$$d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{r}, \text{ soit } \phi = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln r + K.$$

La constante K doit être fixée de façon arbitraire en imposant l'origine $\phi = 0$ en une valeur particulière de r .

Le champ des vitesses d'une source bidimensionnelle de débit linéique D_{vl} est égal à $\vec{v} = \frac{D_{vl}}{2\pi r} \vec{e}_r$. Ce champ dérive du potentiel $\phi = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln r + K$.

* Construction d'un écoulement par superposition :

Principe de superposition :

Les modèles simples que nous venons de décrire permettent de construire des écoulements plus complexes en utilisant une méthode de superposition, suivant un principe déjà évoqué en électromagnétisme.

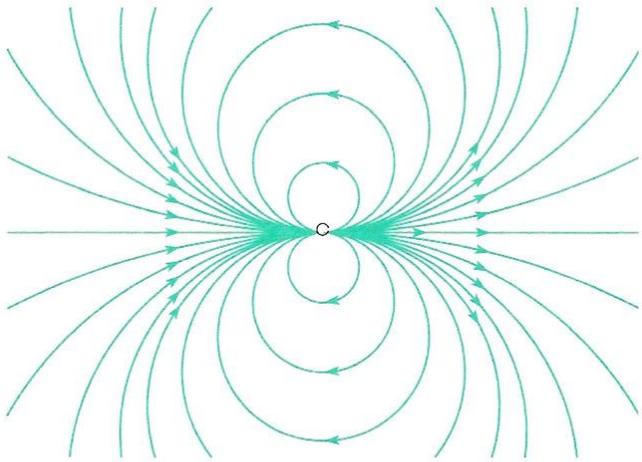
La linéarité des équations différentielles régissant un écoulement permet de décomposer un problème donné en une somme de problèmes simples auxquels correspondent des écoulements de vitesses $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots$

L'écoulement répondant au problème global sera alors caractérisé par :

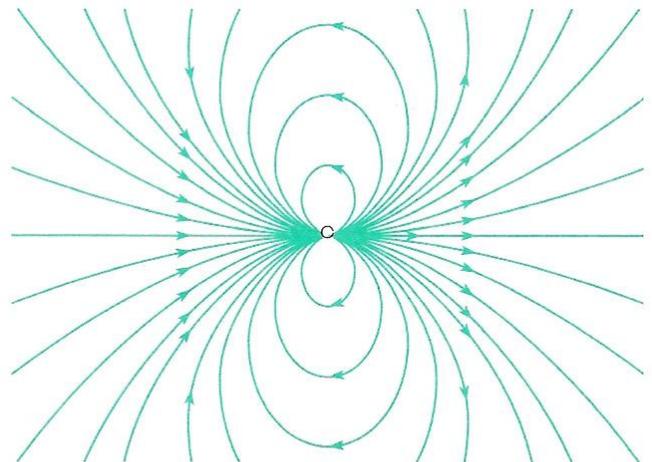
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_i + \dots$$

Dipôle hydrodynamique :

On considère l'association d'une source bidimensionnelle (débit D_{vl}) et d'un puits également bidimensionnel (de débit opposé $-D_{vl}$), situés à proximité l'un de l'autre.



Champ des vitesses relatif à l'écoulement d'un dipôle hydrodynamique.



Lignes de courant du champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique (ensemble de deux charges ponctuelles $(-q, +q)$).

Quelles remarques pouvons-nous faire sur cet écoulement ?

- Les lignes de courant sont des cercles (ce que nous montrerons rigoureusement).
- Ce champ des vitesses ressemble beaucoup à celui du champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique constitué de deux charges symétriques $(-q$ et $+q)$ proches l'une de l'autre, vis-à-vis de la distance d'observation (à droite) mais dans ce cas les lignes de courant ne sont pas des cercles.

Ce dipôle porte le nom de *dipôle hydrodynamique*. Par analogie électrostatique, il s'obtient en superposant deux champs créés par deux lignes infinies chargées $-\lambda$ et $+\lambda$ par unité de longueur, très proches l'une de l'autre devant la distance d'observation.

En $M(r, \theta)$, superposons le champ $\vec{v}_1 = -\frac{D_{vl}}{2\pi r_1} \frac{\vec{r}_1}{r_1}$, de potentiel :

$$\phi_1 = -\frac{D_{vl}}{2\pi} \ln r_1 + K_1,$$

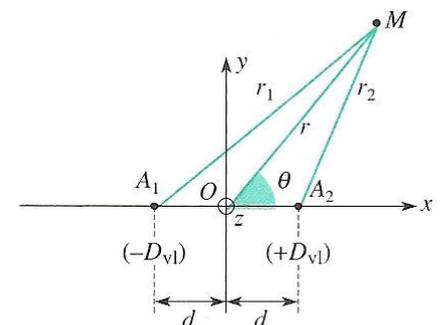
d'un puits bidimensionnel d'axe (Oz) , coupant le plan de la figure en A_1

($\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M}$), et le champ $\vec{v}_2 = +\frac{D_{vl}}{2\pi r_2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$, de potentiel $\phi_2 = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln r_2 + K_2$,

d'une source bidimensionnelle de même axe, coupant le plan de figure en A_2 ($\vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M}$) avec $A_1A_2 = 2d \ll r_1$ et r_2 (donc $d \ll r$)

L'écoulement résultant de la superposition de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 aura un potentiel ϕ tel que :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + K'.$$

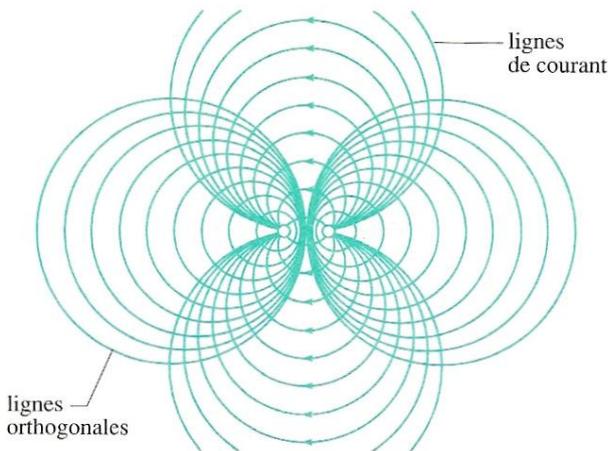


Notations utilisées pour l'étude du dipôle hydrodynamique ($d \ll r$).

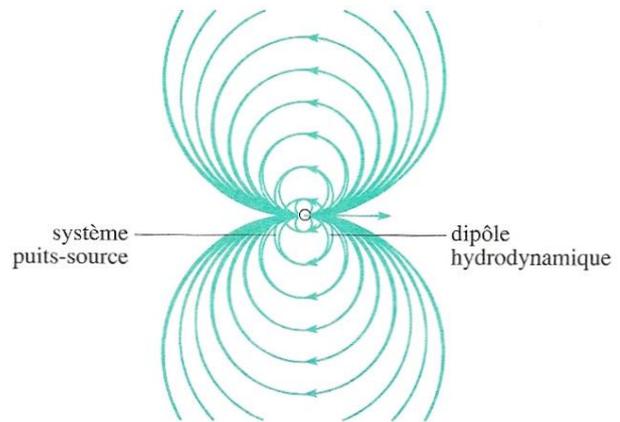
En prenant l'origine de ce potentiel en O (milieu de A_1A_2), nous obtenons :

$$\phi = \frac{D_{vl}}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Les lignes $\phi = \text{cte}$ correspondent aux points tels que $\frac{r_2}{r_1} = \text{cte}$, c'est-à-dire à des cercles. Les lignes orthogonales sont donc aussi des cercles.



Les lignes de courant relatives à la superposition d'un puits et d'une source (débits égaux en module) sont des cercles.



L'écart entre les lignes de courant du dipôle hydrodynamique et celles d'un système puits-source sont peu différentes.

r_1 et r_2 s'expriment en fonction des coordonnées r et θ du point M :

- $r_2^2 = r^2 + d^2 - 2 d r \cos \theta$;
- $r_1^2 = r^2 + d^2 + 2 d r \cos \theta$.

En faisant intervenir des développements limités à l'ordre un (premier terme non nul du développement limité), nous obtenons :

$$r_2^2 = r^2 + d^2 - 2 d r \cos \theta = r^2 \left(1 - \frac{2 d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{r^2} \right), \text{ soit } r_2 \approx r \left(1 - \frac{d \cos \theta}{r} \right) ;$$

$$r_1^2 = r^2 + d^2 + 2 d r \cos \theta = r^2 \left(1 + \frac{2 d \cos \theta}{r} + \frac{d^2}{r^2} \right), \text{ soit } r_1 \approx r \left(1 + \frac{d \cos \theta}{r} \right) ;$$

$$\text{donc } \ln \frac{r_2}{r_1} \approx -\frac{2 d \cos \theta}{r}, \text{ d'où } \phi = -\frac{D_{v1}}{2\pi} \frac{2 d \cos \theta}{r}.$$

Nous pouvons associer à ce dipôle hydrodynamique bidimensionnel, un « moment » :

$$\vec{p} = 2 d D_{v1} \vec{e}_x.$$

Au potentiel ϕ correspond le champ des vitesses $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ de la forme :

$$\vec{v} = \frac{p}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

Remarquons que les lignes de courant du dipôle hydrodynamique sont très voisines de celles du système puits-source dès que $r > 5d$ environ

Conclusion :

Un dipôle hydrodynamique est constitué par la superposition d'un puits ($-D_{v1}$) et d'une source ($+D_{v1}$) bidimensionnels très proches (distance d) l'un de l'autre vis-à-vis des distances r d'observation.

Le potentiel du champ des vitesses est donné dans un système de coordonnées cylindriques par :

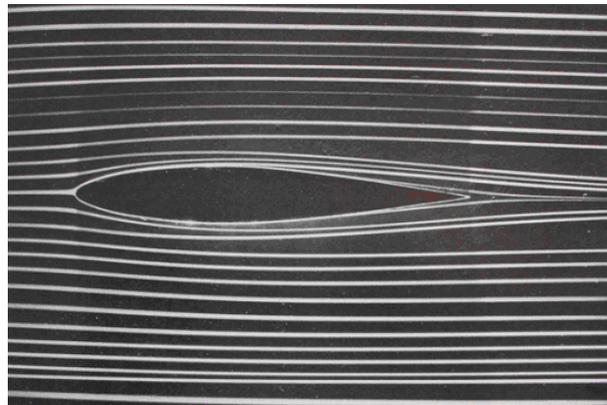
$$\Phi = -\frac{D_{v1} d \cos \theta}{\pi r}$$

7 – Exemple ; écoulement autour d'une aile d'avion :

On considère une aile d'avion cylindrique d'axe horizontal (Oz) et de rayon R, en mouvement rectiligne uniforme à vitesse $U \vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre (R_0).

Loin de l'aile, l'air est au repos et la pression est constante (notée P_∞).

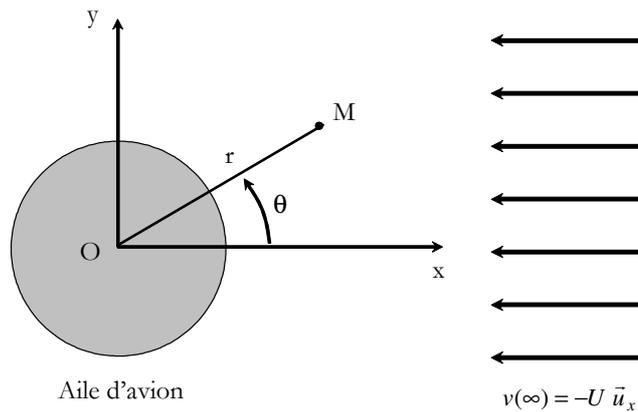
Il est commode pour exprimer les conditions aux limites sur l'aile de traiter le problème dans le référentiel (R) lié à l'avion, où l'on note \vec{v} le champ eulérien des vitesses.



(Écoulement d'air autour d'une aile d'avion.)

Loin de l'aile, la loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{v}(\infty) = v_0(\infty) - \vec{v}_e = \vec{0} - U \vec{u}_x = -U \vec{u}_x$$



Hypothèses :

- L'écoulement est stationnaire.
- L'écoulement est incompressible ; ce choix est convenable bien que l'air soit un fluide compressible si l'on suppose que l'avion est subsonique (Voir paragraphe III-3).

- L'écoulement est irrotationnel.
- L'écoulement est plan et invariant par translation le long de l'axe de l'aile (on néglige les effets de bords) et on écrit $\vec{v}(M) = v_r(r, \theta) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$.

Recherche du champ des vitesses :

L'écoulement étant irrotationnel ($\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$), il existe un potentiel des vitesses Φ tel que :

$$\vec{v} = \overline{\text{grad}} \Phi$$

L'écoulement étant incompressible, $\text{div} \vec{v} = 0$, soit $\Delta \Phi = 0$: le potentiel des vitesses vérifie l'équation de Laplace. Etant donné l'invariance par translation selon (Oz), le potentiel des vitesses est de la forme $\Phi(r, \theta)$.

La solution générale de l'équation de Laplace est dans ce cas :

$$\Phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin(n\theta)$$

où les $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n sont des constantes quelconques. On reconnaît dans cette expression un développement en série de Fourier du potentiel des vitesses à r fixé.

Le problème étant symétrique par rapport au plan médiateur de l'aile $y = 0$, ce développement est pair en θ et les termes en sinus sont nuls :

$$\Phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta)$$

A l'infini :

$$\vec{v} = -U \vec{u}_x = \overline{\text{grad}}(-Ux) = \overline{\text{grad}}(-Ur \cos \theta)$$

Soit $\Phi = -Ur \cos \theta$. On en déduit :

$$\alpha_1 = -U \quad ; \quad \beta_0 = 0 \quad ; \quad \alpha_n = 0 \quad (\text{pour tout } n \neq 1)$$

Ainsi :

$$\Phi(r, \theta) = -Ur \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n r^{-n}) \cos(n\theta)$$

Sur l'aile, la coordonnée normale (la vitesse radiale) de la vitesse doit s'annuler :

$$v_r(R, \theta) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{(R, \theta)} = 0$$

Or :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -U \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (-n \beta_n r^{-n-1}) \cos(n\theta)$$

Par conséquent :

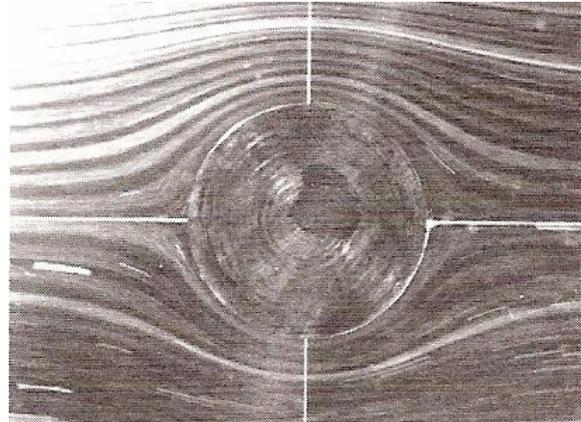
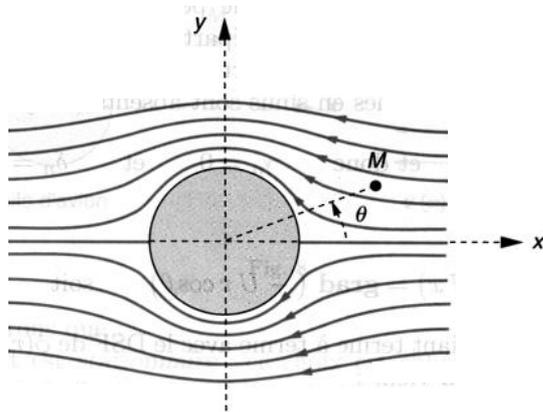
$$-\left(U + \frac{\beta_1}{R^2} \right) \cos \theta - \sum_{n=2}^{\infty} n \beta_n R^{-n-1} \cos(n\theta) = 0$$

D'où :

$$\beta_1 = -UR^2 \quad \text{et} \quad \beta_{n>2} = 0$$

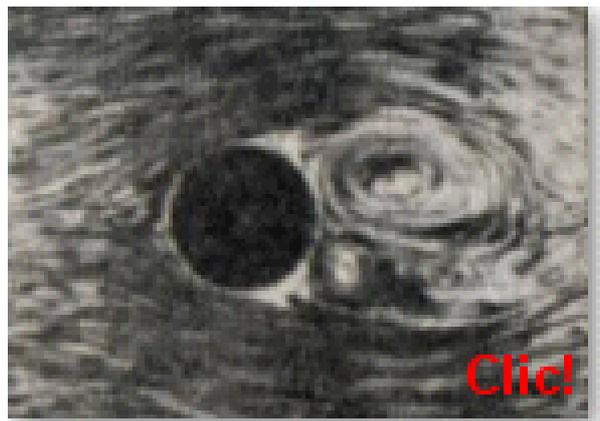
Finalement :

$$\Phi(r, \theta) = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta$$



On en déduit les coordonnées du champ des vitesses :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$



Écoulement autour d'un cylindre. La fin de l'animation montre la désintégration du tourbillon (vortex) symétrique. Ce type d'écoulement peut s'observer quand on touille une tasse de café.

Remarque :

Au paragraphe (II-2), on a donné les coordonnées cartésiennes de la vitesse :

$$v_x = \left[1 + \frac{(y^2 - x^2) R^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] v_0 \quad ; \quad v_y = -2 \frac{xy R^2}{(x^2 + y^2)^2} v_0$$

On peut retrouver ces coordonnées à partir des coordonnées de la vitesse en polaires. En effet, pour la coordonnée selon l'axe (Ox) :

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta = -U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos^2 \theta - U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin^2 \theta$$

Soit :

$$v_x = -U + U \frac{R^2}{r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -U + U \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right)$$

Finalement, avec $v_0 = -U$ et $r^2 = x^2 + y^2$:

$$v_x = \left[1 + \frac{(y^2 - x^2) R^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] v_0$$

On obtiendrait de même l'expression de v_y .

III) Equations dynamiques locales des fluides parfaits :

1 – Forces volumiques, forces massiques :

Dans l'hypothèse du fluide parfait, on néglige les forces de viscosité. Un élément de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm est soumis à des forces de représentation massique ou volumique selon l'expression :

$$d\vec{f} = \vec{f}_m dm = \vec{f}_v d\tau \quad (\text{avec : } \vec{f}_v = \mu \vec{f}_m)$$

Exemples :

- Forces de pesanteur :

$$\vec{f}_m = \vec{g} \quad ; \quad \vec{f}_v = \mu \vec{g}$$

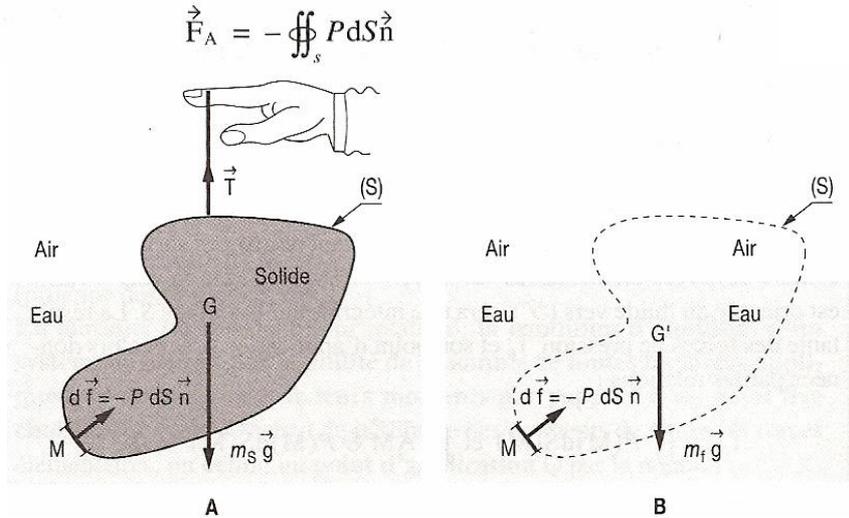
- Forces de pression :

$$d\vec{f} = -\overline{\text{grad}P} d\tau \quad ; \quad \vec{f}_v = -\overline{\text{grad}P} \quad ; \quad \vec{f}_m = -\frac{1}{\mu} \overline{\text{grad}P}$$

Comment démontrer le principe d'Archimède ?

Considérons l'expérience (cf figure) dans laquelle un opérateur tient un solide par un fil et l'immerge partiellement dans de l'eau. Essayons d'expliquer pourquoi l'opérateur exercera une force \vec{T} moins importante que lorsque le solide était dans l'air. Dans ce problème, trois forces interviennent : la tension \vec{T} ; le poids du solide $m_s \vec{g}$ et la résultante \vec{F}_A des forces de pres-

sion que les fluides (air et eau) exercent sur le solide. Cette résultante des forces de pression a pour expression:



où S est la surface du solide, \vec{n} est le vecteur normal en un point M de S , dirigé (selon la convention pour une surface fermée) vers l'extérieur de S (le signe $-$ précédant l'intégrale rectifie cette orientation opposée à celle des forces de pression) et P est la pression en M qui peut être dans l'air ou dans l'eau. Le calcul de \vec{F}_A pourrait s'avérer compliqué et fastidieux en particulier si le solide a une forme compliquée, aussi nous allons éviter ce calcul d'intégrale de surface, par un raisonnement physique.

Considérons la situation (figure B) dans laquelle le solide a été remplacé par des fluides (air et eau) en équilibre, c'est-à-dire avec une interface plane horizontale. Dans le fluide extérieur à S , qui est en équilibre mécanique aussi bien dans le cas (A) que dans le cas (B), la pression (donnée par la loi de l'hydrostatique) est la même dans les deux cas : $P(M)$ est inchangée en tout

point M de S . La force \vec{F}_A exercée par les fluides extérieurs sur la surface S , définie à partir de S et de la pression en tout point de S , est donc elle aussi la même. On peut ainsi la calculer dans le cas particulier (B), où les seules forces appliquées sur le « système » délimité par S sont \vec{F}_A et le poids des fluides contenus dans S , $m_f \vec{g}$, qui s'applique en leur centre de gravité G' . Dans le cas (B), où le système est constitué d'un volume d'air V_{air} , de masse $m_{\text{air}} = \rho_{\text{air}} V_{\text{air}}$ et de centre de gravité G_{air} , et d'un volume d'eau V_{eau} , de masse $m_{\text{eau}} = \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}}$ et de centre de gravité G_{eau} , on peut rappeler que m_f et G' seront définis par $m_f = m_{\text{air}} + m_{\text{eau}}$ et $m_{\text{air}} \overrightarrow{G'G_{\text{air}}} + m_{\text{eau}} \overrightarrow{G'G_{\text{eau}}} = \vec{0}$. Comme le système est en équilibre mécanique, la somme des forces est nulle, ainsi que celle de leurs moments (que l'on peut calculer par rapport à G' pour que le moment du poids s'annule) :

$$\vec{F}_A = - m_f \vec{g} \text{ et } \iint_S \overrightarrow{G'M} \otimes P_{(M)} d\vec{S}_{(M)} = \vec{0}$$

G' répond donc à la définition de point d'application pour les forces de pression.

Les forces de pression sur un volume quelconque immergé dans des fluides en équilibre mécanique peuvent être modélisées par une résultante

tante (poussée d'Archimède) égale à l'opposé du poids qu'aurait ce volume occupé par des fluides en équilibre, et s'appliquant au centre de gravité G' de ce volume de fluides. Ceci est en général résumé par un énoncé plus succinct du **théorème d'Archimède** :

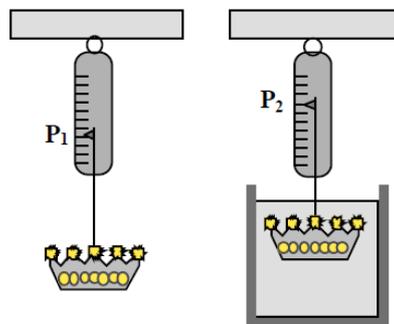
Tout corps plongé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

Dans l'expérience (Figure A) l'opérateur exerce donc une tension $\vec{T} = -(\rho_s V - \rho_{\text{air}} V_{\text{air}} - \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}}) \vec{g}$, avec $V_{\text{air}} + V_{\text{eau}} = V$. Ici, il est clair que la poussée d'Archimède due à l'air peut être négligée (l'air est mille fois moins dense que les solides et les liquides), d'où $\vec{T} = -(\rho_s V - \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}}) \vec{g}$, et la tension diminue effectivement lorsque le volume du solide immergé dans l'eau, V_{eau} , augmente.

Si l'opérateur lâche le fil ($\vec{T} = \vec{0}$), deux cas peuvent se produire :

- $\rho_s > \rho_{\text{eau}}$: la poussée d'Archimède F_A , au plus égale à $\rho_{\text{eau}} V g$ lorsque le solide est complètement immergé, reste toujours inférieure au poids du solide, et celui-ci coule ;
- $\rho_{\text{eau}} > \rho_s$: il existe une position d'équilibre stable où la proportion de solide immergé est égale au rapport de densités du solide avec l'eau ($V_{\text{eau}}/V = \rho_s/\rho_{\text{eau}}$) ; le solide flotte.

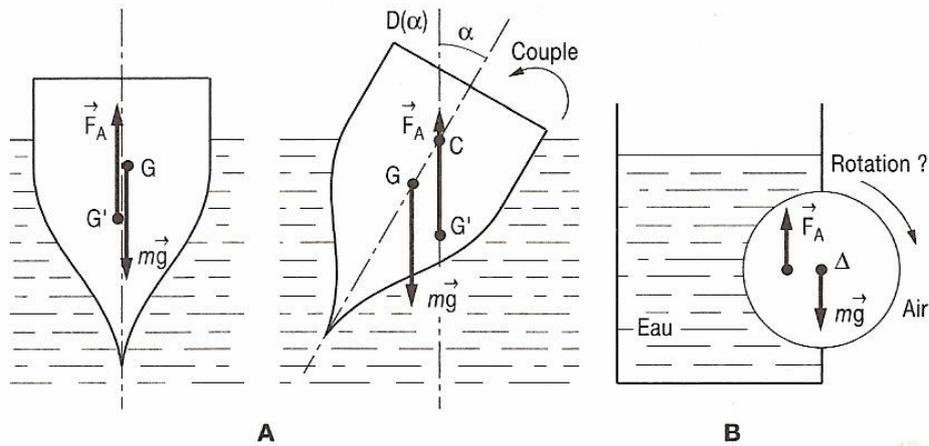
En guise d'exemple un glaçon ($\rho_s = 0,92 \text{ g.cm}^{-3}$) flotte avec 8 % de son volume au-dessus de la surface de l'eau. Notre démonstration du théorème d'Archimède permet également de montrer facilement qu'un glaçon une fois fondu occupe le même volume que sa partie immergée : un verre rempli d'eau à ras bord avec des glaçons qui dépassent ne débordera donc jamais !



Une couronne en or ou en métal quelconque ?

Pourquoi un bateau flotte et existence du mouvement perpétuel ?

La condition pour qu'un bateau puisse flotter est relativement simple : il faut que son poids total soit inférieur au poids d'un volume d'eau égal à son volume immergeable (à peu près le volume de sa coque). Une chose moins simple est de s'assurer que le bateau ne chavirera pas : on a vu un galion nommé Vasa se retourner dans le port de Stockholm le jour de son baptême !



A : pourquoi un bateau flotte ? **B** : le mouvement perpétuel ?

Un bateau qui flotte ($\vec{F}_A + m\vec{g} = \vec{0}$) est stable quand une rotation d'un angle α (angle de roulis) engendre un couple qui s'oppose à cette rotation. Lors de cette rotation, qui s'effectue à volume immergé constant, le couple créé est égal au moment de \vec{F}_A par rapport au centre de gravité G du bateau, $\overrightarrow{GG'} \wedge \vec{F}_A$, où $G'(\alpha)$ est l'isobarycentre du volume immergé.

Mais le sens de ce moment est complexe à déterminer car le point d'application $G'(\alpha)$ n'est pas un point fixe du bateau. Toutefois, chaque point de la droite verticale $D(\alpha)$ contenant $G'(\alpha)$ répond à la définition de point d'application pour \vec{F}_A . Pour des angles α pas trop grands, les droites $D(\alpha)$ définies dans le repère lié au bateau se coupent toutes en un même point C .

Tout se passe donc comme si la poussée d'Archimède s'appliquait au point C , appelé centre de poussée ou métacentre, fixe par rapport au bateau. Ce centre de poussée (une fois déterminé par des calculs en général complexes) permet de qualifier facilement la stabilité.

Le bateau est stable lorsque son centre de poussée C est au-dessus du centre de gravité du bateau G (le moment des forces tend à ramener le bateau vers sa position $\alpha = 0$) et la stabilité est d'autant meilleure (forte intensité du couple s'opposant au roulis) que C est haut par rapport à G . En pratique, on augmente la stabilité des bateaux en abaissant leur centre de gravité G , que ce soit en lestant leur quille ou en plaçant les chargements lourds en fond de cale.

« Les limites à Archimède » :

On a représenté (figure B) en coupe un cylindre homogène susceptible de tourner autour de son axe Δ et à moitié immergé dans une cuve d'eau (des joints entre la paroi de la cuve et le cylindre assurent l'étanchéité sans gêner une rotation éventuelle). Si on cherche à appliquer le théorème d'Archimède, il est clair que le cylindre ayant une moitié dans l'eau et une moitié dans l'air (de densité négligeable), le centre de gravité G' « des fluides déplacés » se trouve dans la partie immergée dans l'eau. La poussée d'Archimède exerce donc un couple non nul par rapport à Δ . Comme le poids s'exerce au centre de gravité G appartenant à Δ , son moment par rapport à Δ , ainsi que celui de la réaction de l'axe, est nul et le moment de la poussée d'Archimède n'est donc pas compensé : le cylindre tourne. On en déduit alors, avec sans doute une certaine excitation, que l'on a enfin inventé le mouvement perpétuel ! Cette conclusion, démentie hélas par l'expérience, est également démentie par un raisonnement sur les forces élémentaires de pression qui s'appliquent sur le cylindre : chacune de ces forces normales à la surface est concourante ou parallèle à Δ (respectivement pour les forces s'appliquant sur la surface cylindrique et sur les deux

sections fermant le cylindre), elles ont donc toutes un moment nul par rapport à Δ , et le cylindre ne doit donc pas tourner !

Ce paradoxe (apparent) célèbre rappelle que le théorème d'Archimède n'est applicable que lorsque l'objet immergé peut être remplacé, sans perturber les fluides entourant l'objet, par des fluides qui seraient à l'équilibre mécanique. Or, il est clair ici que cette condition ne peut être remplie : dans le cas envisagé, l'interface entre l'eau et l'air n'est pas horizontale ! En conclusion, hormis le cas trivial d'un objet complètement immergé dans un seul fluide connexe, il sera toujours prudent, avant de faire appel à Archimède, de vérifier que l'on peut effectivement remplacer l'objet par des fluides en équilibre !

2 – Equation d'Euler, applications :

Dans un référentiel galiléen (R), la relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule de fluide de masse dm dont on suit le mouvement et soumise aux forces $d\vec{F}$ s'écrit :

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}$$

Or :

- $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overline{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$
- $d\vec{F} = -\overline{\text{grad}}P d\tau + \vec{f}_v d\tau$
- $dm = \mu d\tau$

D'où l'équation d'Euler :

$$\mu \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = -\overline{\text{grad}}P + \vec{f}_v$$

Ou encore :

$$\mu \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \mu \overline{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mu \overline{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = -\overline{\text{grad}}P + \vec{f}_v$$

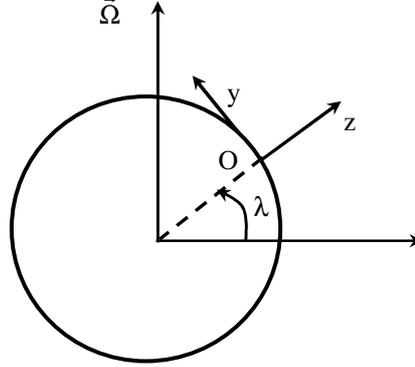
Applications :

- *Exemple des écoulements géostrophiques :*

On considère un point O de latitude λ à la surface de la Terre et un repère (Oxyz) du référentiel terrestre (R). Le référentiel terrestre est en rotation avec un vecteur $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_{SN}$ dirigé par l'axe Sud – Nord par rapport au référentiel géocentrique galiléen. Il apparaît donc dans le référentiel terrestre des forces de Coriolis et des forces d'inertie d'entraînement. Rappelons que par définition du poids, les forces d'inertie d'entraînement sont incluses dans le poids que nous supposons décrit par un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ localement uniforme. On va chercher un critère pour pouvoir négliger tous les termes contenant la vitesse dans l'équation d'Euler sauf celui dû aux forces de Coriolis. Pour cela on se donne une vitesse caractéristique v , une échelle spatiale caractéristique L et une durée caractéristique d'évolution τ pour le champ des vitesses de telle sorte que :

$$\frac{\|\mu(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|} \approx \frac{\mu v(v/L)}{\mu\Omega v} \approx \frac{v}{L\Omega}$$

$$\frac{\|\mu \frac{\partial v}{\partial t}\|}{\|\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|} \approx \frac{\mu(v/\tau)}{\mu\Omega v} \approx \frac{1}{\tau\Omega}$$



Ainsi, pour des vents tels que $v \approx 0,1 \text{ m.s}^{-1}$ évoluant sur une durée τ supérieure à dix jours sur des échelles spatiales de l'ordre d'au moins cinquante kilomètres, on a, avec $\Omega = 7.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$:

$$\frac{\|\mu(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v}\|}{\|\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|} < 3.10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\|\mu \frac{\partial v}{\partial t}\|}{\|\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|} < 10^{-1}$$

Ceci permet de négliger l'accélération et d'écrire l'équation d'Euler sous la forme simplifiée :

$$-\overline{\text{grad}}P + \mu\vec{g} - 2\mu\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

- Cas des vents horizontaux :

On suppose désormais que le mouvement vertical est négligeable. Le terme de Coriolis s'écrit alors :

$$\frac{dF_{ic}}{d\tau} = -2\mu \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2\mu\Omega \sin \lambda v_y \\ -2\mu\Omega \sin \lambda v_x \\ 2\mu\Omega \cos \lambda v_x \end{pmatrix}$$

La composante verticale de la force de Coriolis est négligeable devant le poids, de telle sorte que l'équation d'Euler projetée sur la verticale conduit seulement à la relation de la statique des fluides, $\partial P / \partial z = -\mu g$. En définitive, en notant $\vec{\Omega}_{//} = \Omega_z \vec{u}_z = \Omega \sin \lambda \vec{u}_z$, l'équation d'Euler dans le plan horizontal s'écrit vectoriellement :

$$\overline{\text{grad}}P = -2\mu\vec{\Omega}_{//} \wedge \vec{v}$$

- Allure des lignes de courants :

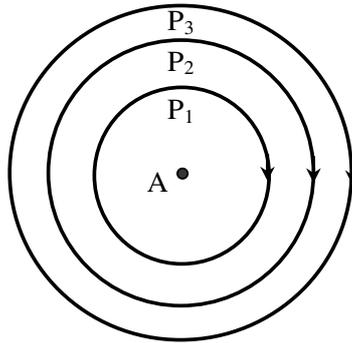
Pour comparer les lignes de courant définies par $d(\overline{OM}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et les isobares définies par :

$$dp = \overline{\text{grad}P} \cdot d(\overline{OM}) = 0$$

On prend le produit scalaire de l'équation précédente par $d(\overline{OM})$:

$$dp = d(\overline{OM}) \cdot \overline{\text{grad}p} = -2\mu(\vec{\Omega}_{//} \wedge \vec{v}) \cdot d(\overline{OM}) = -2\mu(\vec{\Omega}_{//}, \vec{v}, \overline{OM}) = 2\mu\Omega \sin \lambda \vec{u}_z \cdot (d(\overline{OM}) \wedge \vec{v})$$

Ainsi le long d'une isobare on a $dp = 0$ et donc le vecteur $d(\overline{OM}) \wedge \vec{v}$ qui est parallèle à \vec{u}_z doit être nul afin d'avoir une ligne de courant. On montre donc que les isobares sont aussi lignes de courant.



Sens de rotation des vents autour d'un anticyclone ($P_3 < P_2 < P_1$) dans l'hémisphère Nord.

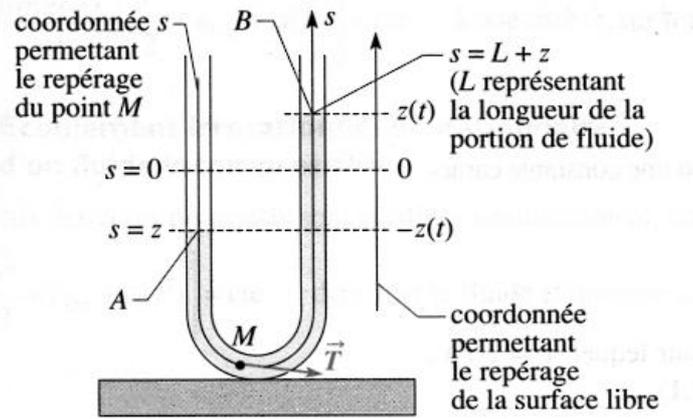
En outre, au voisinage d'un anticyclone (A) dans l'hémisphère Nord ($\sin \lambda > 0$), on $dp < 0$ lorsqu'on s'éloigne du centre et la relation ci-dessus impose que le trièdre $(\vec{u}_z, d(\overline{OM}), \vec{v})$ soit indirect : donc le vent tourne dans le sens des aiguilles d'une montre autour d'un anticyclone dans l'hémisphère Nord. Le sens de rotation est inversé pour une dépression dans l'hémisphère Nord car alors $dp > 0$. Enfin les sens de rotation sont inversés dans l'hémisphère Sud car alors $\sin \lambda < 0$.

- **Oscillations d'un fluide dans un tube en U :**

On souhaite étudier les oscillations d'un fluide incompressible dans un tube en U de faible section en intégrant l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant. On suppose que les surfaces libres restent dans les parties rectilignes et verticales du tube.

Solution :

La cote de la surface libre du fluide dans la branche droite du tube est notée z . Soit s l'abscisse curviligne d'un point M du fluide. La vitesse s'écrit $\vec{v}(M, t) = \dot{z}(t)\vec{T}$, où \vec{T} est le vecteur unitaire tangent à la ligne de courant (voir figure).



À la date t , la vitesse d'un point M du fluide est donnée en formalisme d'EULER par l'expression suivante :

$$\vec{v}(M, t) = \dot{z}(t) \vec{T} .$$

L'intégrale de l'équation d'Euler s'écrit :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} + \left[e_{pm}(M, t) + \frac{v^2(M, t)}{2} \right]_A^B + \frac{1}{\rho} \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} P(M, t) \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Soit :

$$L\ddot{z} + 2gz = 0$$

D'où un mouvement oscillant sinusoïdal de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$.

La méthode de résolution utilisée ici se généralise et conduit au théorème de Bernoulli.

3 – Relations de Bernoulli, applications :

On suppose dans la suite que la seule force volumique (autre que les forces de pression) est le poids.

- **Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène :**

L'équation d'Euler devient :

$$\mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \vec{g}$$

En notant :

$$\mu \vec{g} = -\mu \overrightarrow{\text{grad}}(gz) \quad (\text{l'axe (Oz) est orienté vers le haut})$$

Alors :

$$\mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P - \mu \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

D'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P\right) = \vec{0}$$

Un champ scalaire dont le gradient est nul est indépendant du point M ; c'est une fonction du temps uniquement $f(t)$. Comme l'écoulement est stationnaire, cette fonction est constante :

$$\frac{1}{2}\mu v^2 + \mu gz + P = C \quad (\text{Théorème de Bernoulli})$$

Ainsi, le théorème de Bernoulli affirme que la quantité $\frac{1}{2}\mu v^2 + \mu gz + P$ reste en tout point égale à une même constante.

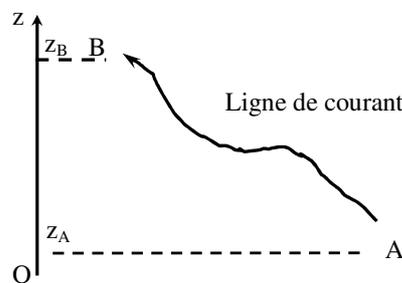
Remarque :

Dans le CP où $v = 0$, on retrouve la relation fondamentale de l'hydrostatique des fluides ($\mu gz + P = C$). On remarque que $\frac{1}{2}\mu v^2$ et μgz désignent les énergies volumiques cinétique et potentielle (de pesanteur), homogènes à une pression.

• **Cas d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène :**

On renonce à l'hypothèse « écoulement irrotationnel ». Alors :

$$\mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P\right)$$



Afin d'éliminer le terme en rotationnel, on multiplie scalairement par $d\vec{r}$ et on intègre le long d'une ligne de courant entre deux points A et B :

$$\int_A^B \mu (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P\right) \cdot d\vec{r}$$

En tout point, $d\vec{r}$ est parallèle au champ des vitesses : le terme $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{r}$ est donc nul. Ainsi :

$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\mu \frac{v^2}{2} + \mu gz + P\right) \cdot d\vec{r} = 0$$

Soit :

$$\frac{1}{2}\mu v_A^2 + \mu gz_A + P_A = \frac{1}{2}\mu v_B^2 + \mu gz_B + P_B$$

Ainsi, l'abandon de l'hypothèse « écoulement irrotationnel » restreint le théorème de Bernoulli aux points A et B d'une même ligne de courant.

- **Cas d'un écoulement parfait, non stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène :**

L'équation d'Euler devient :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu \overline{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\overline{\text{grad}} P - \mu \overline{\text{grad}}(gz)$$

Soit :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + P + \mu gz \right)$$

Comme $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, on peut définir un potentiel des vitesses tel que $\vec{v} = \overline{\text{grad}} \Phi$. Alors, avec :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\text{grad}} \Phi) = \overline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

Il vient :

$$\overline{\text{grad}} \left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu v^2 + P + \mu gz \right) = \vec{0}$$

Soit une généralisation du théorème de Bernoulli dans le cas non stationnaire :

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu v^2 + P + \mu gz = f(t) \quad (\text{fonction du temps uniquement})$$

- **Interprétation énergétique du théorème de Bernoulli :**

On se place dans le cas d'un écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène. Alors :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz + P = C$$

En multipliant par le volume $d\tau$ d'une particule de fluide :

$$\frac{1}{2} \mu d\tau v^2 + \mu d\tau gz + P d\tau = Cste$$

On reconnaît :

- $\mu d\tau gz$: énergie potentielle de pesanteur de la particule de fluide.
- $\frac{1}{2} \mu d\tau v^2$: énergie cinétique de la particule de fluide.
- $P d\tau$: énergie potentielle associée aux forces de pression.

Le théorème de Bernoulli, plus général que la simple conservation de l'énergie mécanique d'un point matériel dans un milieu non continu, est un cas particulier du 1^{er} principe :

$$d(U + E_{c,macro} + E_{p,macro}) = -P d\tau + \delta Q$$

Avec $dU = \delta Q = 0$: les hypothèses implicites de l'application du théorème de Bernoulli sont les aspects isothermes et adiabatiques de l'évolution. En effet, pour un fluide parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. Par ailleurs, l'aspect adiabatique de la transformation ne pose pas de problème particulier ; en l'absence de transfert thermique en provenance de l'extérieur du fluide, il n'y a pas de production de chaleur au sein même d'un fluide non visqueux.

Applications :

- **Ecoulement permanent et lent d'un fluide compressible :**

Peut-on appliquer le théorème de Bernoulli sous sa forme la plus simple à un fluide compressible comme l'air ? On rappelle la définition du coefficient de compressibilité :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (\text{à } T = \text{cste})$$

Il peut encore s'écrire en fonction de la masse volumique : $\left(\mu = \frac{m}{V} \right)$

$$\chi_T = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP}$$

On suppose qu'il est possible de négliger les variations de μ pour un écoulement permanent où la vitesse varie entre 0 et v_{\max} . D'après le théorème de Bernoulli (en l'absence de variation de la cote z), la pression varierait entre P_{\min} et P_{\max} avec :

$$P_{\max} = P_{\min} + \Delta P = P_{\min} + \mu \frac{v_{\max}^2}{2}$$

Une telle variation de pression est compatible avec l'hypothèse si la variation de μ qui lui est liée est faible en valeur relative, soit si :

$$\Delta\mu \approx \chi_T \mu \Delta P = \chi_T \mu^2 \frac{v_{\max}^2}{2} \ll \mu \quad \text{soit} \quad v_{\max}^2 \ll \frac{2}{\chi_T \mu}$$

Or, $c = \sqrt{\frac{1}{\mu \chi}}$ correspond à l'ordre de grandeur de la vitesse du son dans le fluide, par conséquent, en ordre de grandeur :

$$v_{\max} \ll c$$

Il est donc possible d'appliquer la relation de Bernoulli la plus simple (écoulement parfait stationnaire, homogène et irrotationnel) :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu gz + P = C$$

à un fluide compressible, dans la mesure où la vitesse d'écoulement reste très inférieure à la vitesse de propagation du son dans ce fluide.

Ainsi, pour les liquides, on pourra généralement appliquer le modèle incompressible, excepté si les conditions sont telles que des changements de phase puissent se produire (cavitation par exemple). Pour les gaz en revanche, il est nécessaire de s'intéresser aux gammes de vitesses mises en jeu. On considère pour cela un nombre sans dimension bien connu en aérodynamique : le nombre de Mach, défini comme le rapport entre la vitesse de l'écoulement V et la vitesse du son a : $M = \frac{V}{a}$. Le nombre de Mach permet de distinguer les régimes subsonique ($M < 1$), supersonique ($1 < M < 5$) et hypersonique ($M > 5$). D'autre part, on peut montrer que pour des écoulements dont le nombre de Mach est inférieur à 0.2, le résultat du calcul de la vitesse fait en considérant le fluide incompressible ne diffère pas de plus de 1% de la valeur trouvée en prenant en compte la compressibilité. C'est la raison pour laquelle on distingue au sein du régime subsonique la plage des écoulements incompressibles et celle des écoulements où les effets de compressibilité dus au mouvement ne peuvent plus être négligés.

Par exemple, pour une voiture particulière ordinaire, les vitesses maximales couramment atteintes sont de l'ordre de 150 km/h (41.7 m/s, soit $M=0.12$ avec dans les conditions normales : $a=340$ m/s pour l'air). On se situe donc dans le cas du régime incompressible.

Par contre, pour un avion civil, le nombre de Mach de croisière se situe autour de $M=0.8$, imposant ainsi la prise en compte des effets de compressibilité. Ces derniers sont par ailleurs indispensables si l'on souhaite s'intéresser aux problèmes acoustiques car les ondes sonores ne peuvent être traitées qu'à partir des équations de Navier-Stokes compressibles. Une illustration très connue de ces aspects est le fameux « bang sonique » entendu lorsqu'un avion franchit le « mur du son », *i.e.* dépasse Mach 1. Ce bruit constitue la signature acoustique des compressions brutales (ondes de choc) subies par l'écoulement autour de l'avion en mouvement à ces vitesses très importantes.

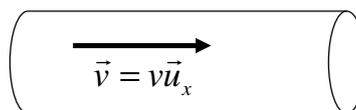
- **Jet homocinétique à l'air libre :**

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible sous forme :

* d'un jet libre, c'est-à-dire sans aucun contact avec une surface rigide ou un autre fluide ;

* de vitesse constante $\vec{v} = v \vec{u}_x$.

Ce jet est dit homocinétique.



Jet homocinétique

On suppose que les seules forces intervenant sont les forces de pression ; la relation de Bernoulli s'écrit, dans tout le jet :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + P = cste$$

La vitesse étant la même en tout point du jet, il en est de même de la pression. Aux bords du jet, au contact de l'atmosphère, la pression vaut P_0 . C'est donc la pression en tout point du jet.

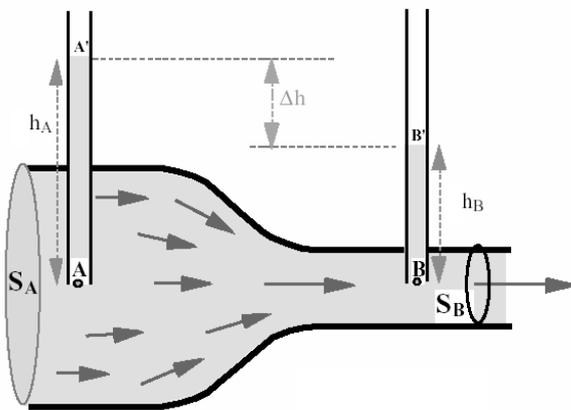
Dans un jet homogène à l'air libre, la pression est uniforme et égale à celle existant dans le milieu extérieur. On admettra ce résultat pour tout jet à l'air libre.

- **Le phénomène de Venturi :**

Un écoulement stationnaire homogène incompressible et soumis aux seules forces de pression, est limité par une conduite de section variable. Le problème est unidimensionnel : toutes les grandeurs ont une valeur uniforme sur une section droite de la conduite.

La conservation du débit volumique D_v entre les deux sections d'aires S_A et S_B donne :

$$v_A S_A = v_B S_B \quad \text{soit} \quad v_A < v_B$$



Mnémotechnique: file d'attente au restaurant universitaire. Etudiants *compressés* dans la partie large à *écoulement faible* puis étudiants "à l'aise" dans la partie étroite à *écoulement plus rapide*.

L'application du théorème de Bernoulli entre deux points A et B situés sur une même horizontale donne :

$$\frac{1}{2} \mu v_A^2 + P_A = \frac{1}{2} \mu v_B^2 + P_B$$

On en déduit que $P_A > P_B$: les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont aussi des régions de basse pression (effet Venturi).

Dans les tubes verticaux, le fluide est immobile et les hauteurs de liquide mesurent les pressions P_A et P_B :

$$P_A = P_{atm} + \mu g h_A \quad \text{et} \quad P_B = P_{atm} + \mu g h_B$$

On en déduit la différence de pression :

$$P_A - P_B = \mu g (h_A - h_B)$$

On peut ensuite en déduire le débit volumique dans la conduite, en calculant préalablement v_A :

$$v_A^2 - v_B^2 = v_A^2 - \left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 v_A^2 = \frac{2}{\mu} (P_B - P_A) = -2g(h_A - h_B)$$

D'où :

$$v_A = \sqrt{\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} 2g(h_A - h_B)}$$

Et le débit volumique D_v vaut :

$$D_v = S_A v_A = S_A \sqrt{\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} 2g(h_A - h_B)}$$

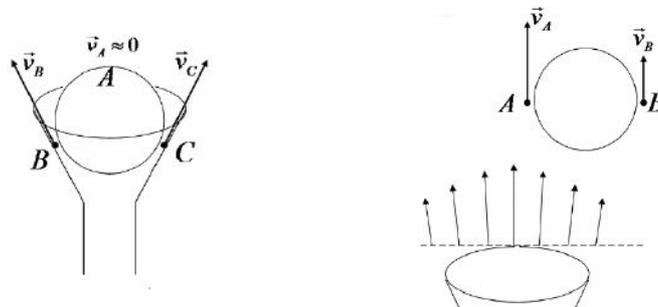
Le tube de Venturi peut ainsi servir de débitmètre.

Remarque : l'effet Venturi reste bien vérifié par un gaz compressible comme l'air, tant que sa vitesse reste inférieure à la vitesse de propagation du son.

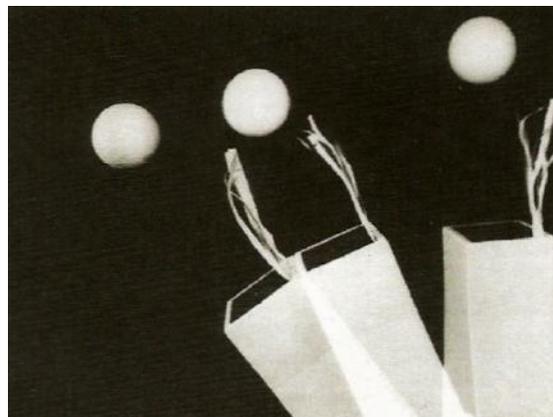
Autre conséquence de l'effet Venturi (balle de ping-pong dans un flux d'air) :

Dans le cas où la balle est tout près de l'entonnoir, la vitesse de l'air au voisinage des points proches (B et C sur la figure) est supérieure à la vitesse au sommet de la balle (par exemple, au point A). Par le théorème de Bernoulli, la pression en B et en C est inférieure à la pression en A. La résultante des forces de pression sera dirigée vers le bas et aura donc tendance à « plaquer » la balle contre l'entonnoir.

Cas où la balle est loin de l'entonnoir : la vitesse de l'écoulement est plus élevée au centre du jet d'air qu'aux bords et donc si la balle est décentrée par rapport au jet d'air, la pression du côté du centre (A) est plus faible que du côté du bord (B). La résultante des forces de pression est dirigée de B vers A, donc aura tendance à ramener la balle au centre du jet d'air. Elle agit comme une force de rappel. La balle semble attirée par les régions de l'écoulement où la vitesse est la plus rapide.

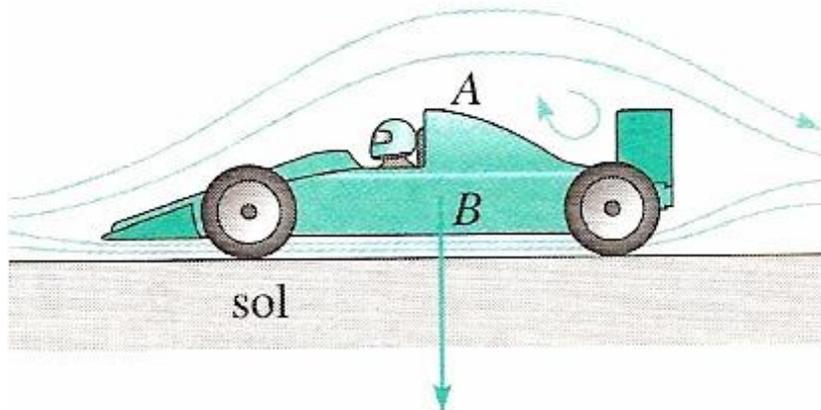


Balle de ping-pong dans un jet d'air.

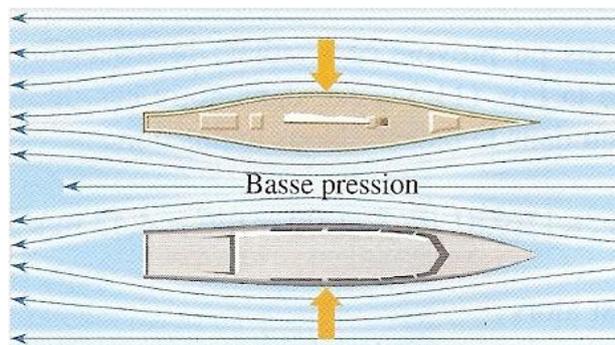


Lorsque que le jet est vertical (à droite), la balle est maintenue en suspension par une force de traînée parallèle à l'écoulement. Si on l'incline (à gauche), la balle reste suspendue grâce à une force d'attraction due à la déviation du jet.

Autres conséquences de l'effet Venturi :



Effet de sol pour une formule 1 : $P_A > P_B$.

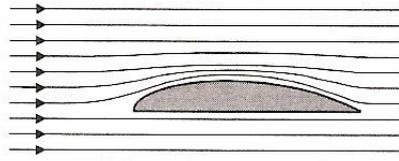


Deux bateaux naviguant côte à côte ou amarrés dans un courant. La déflexion des lignes de courant entre les navires produit une chute de pression par effet Venturi et les deux bateaux éprouvent une force qui les pousse l'un vers l'autre.

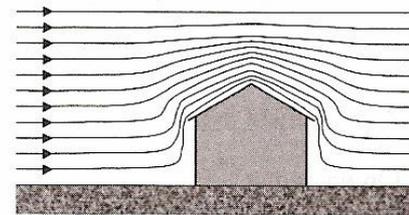


De forts vents peuvent être créés par effet Venturi dans les rues aux bâtiments alignés.

On l'utilise dans la trompe à eau, pour créer un vide modéré à la sortie d'une prise d'eau. Il permet également de justifier la forme des ailes d'avion. Alors que la face inférieure (intrados) est plutôt plane, la face supérieure (extrados) est bombée et sa forme provoque un resserrement des lignes de courant de l'écoulement d'air au-dessus d'elle, donc une dépression et l'aile est aspirée vers le haut. Cet effet n'explique pas seul la portance de l'aile mais y contribue de manière significative.

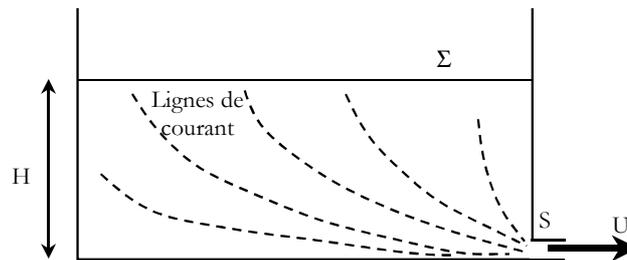


L'effet Venturi permet également de comprendre l'arrachement d'une toiture lors d'un fort coup de vent. Elle est aspirée par la dépression née de l'accélération de l'air à sa surface (et non parce que la pression atmosphérique est plus basse quand il y a du vent comme on le croit souvent !). Le même effet peut faire décoller tout obstacle insuffisamment arrimé au sol.



- **Vidange d'un réservoir ; formule de Torricelli :**

En étudiant l'écoulement de l'eau par un orifice de surface S percé dans le bas d'une cuve, Torricelli observa que le jet sortait perpendiculairement à la surface S , avec un débit volumique $D_v(t)$ proportionnel à S et à la racine carrée de la hauteur d'eau $H(t)$ dans la cuve.



Comment interpréter ce résultat ? La conservation du débit donne :

$$D_v(t) = SU(t) = -\Sigma \frac{dH}{dt}$$

où $U(t)$ est la vitesse de sortie dans le jet et Σ la section de la cuve. Comme $S \ll \Sigma$, on en déduit que $\left| \frac{dH}{dt} \right| \ll U$: on peut se placer en régime quasi-stationnaire en supposant $H \approx cste$ et utiliser la relation de Bernoulli en régime stationnaire (voir le 2nd exercice ci – dessous pour la justification).

On se place sur une ligne de courant (voir figure). Le jet d'eau étant à l'air libre, sa pression est celle du gaz qui l'entoure, c'est-à-dire la pression atmosphérique P_0 . Il en est de même pour la surface libre dans la cuve. Le théorème de Bernoulli donne alors :

$$P_0 + \mu gH = P_0 + \frac{1}{2} \mu U^2$$

Par conséquent :

$$U = \sqrt{2gH}$$

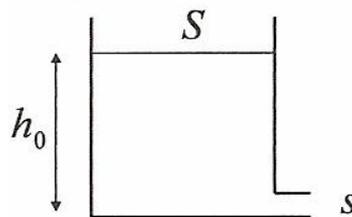


On obtient une loi analogue à la loi de la chute libre dans le champ de pesanteur.

Ensuite, le jet suit une loi de chute libre avec la vitesse initiale U horizontale, d'où la forme parabolique du jet.

1^{er} exercice ; temps de vidange d'un réservoir :

Le liquide considéré est un fluide parfait en écoulement incompressible.

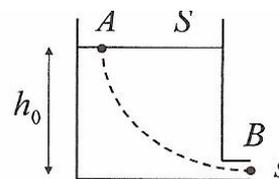


La section de l'ouverture de vidange s est petite devant la surface libre S du liquide.

- a) Montrer que cela permet de trouver simplement la vitesse d'éjection v_0 en fonction de h_0 ; commentaire. AN : Calculer v_0 pour $h_0 = 1$ m
- b) Sous quelle hypothèse peut-on estimer le temps de vidange τ du réservoir ? AN : Calculer τ pour $h_0 = 1$ m , $S = 0,5$ m² et $s = 1,5$ cm².

Solution :

- a) Soient A et B deux points sur une même ligne de courant pris respectivement sur la surface libre S et sur l'extrémité de la section d'ouverture s . À cause du rapport des surfaces, $s \ll S$, la conservation du débit massique $v_A S = v_B s$ conduit à $v_A \ll v_B$. Le théorème



de Bernoulli s'applique car le fluide est parfait (sans force autre), l'écoulement est incompressible et au début, stationnaire :

$$0 + gz_A + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + gz_B + \frac{P_0}{\rho} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gh_0}}$$

Il s'agit de la formule de Torricelli, identique à celle de la chute libre, car l'énergie cinétique est acquise au dépens de l'énergie potentielle de pesanteur.

AN : $v_0 = 4,43 \text{ m.s}^{-1}$

b) Au cours du temps la hauteur d'eau h diminue et il en est de même de la vitesse d'éjection v_B et donc du débit $D_V = v_B s$. Supposer le régime quasi permanent à tout instant revient à adapter la formule de Torricelli sous la forme $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ (c'est le même procédé qui est utilisé en électromagnétisme dans l'approximation des régimes quasi stationnaires).

La loi de vidange est : $v_B = \sqrt{2gh} = \frac{S}{s} v_A = -\frac{S}{s} \frac{dh}{dt}$ (1) $\Rightarrow -\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$

par intégration : $2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}) = \frac{s}{S} \sqrt{2g} t$ ou $v(t) = v_0 - \frac{s}{S} gt$ (fonction affine)

Le temps de vidange τ du réservoir s'obtient en traduisant $h(\tau) = 0$, soit

$$\tau = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

AN : $\tau \approx 1\,500 \text{ s} \approx 25 \text{ min}$

- **Le tube de Pitot (Ingénieur français, XVIII^{ème} siècle) :**

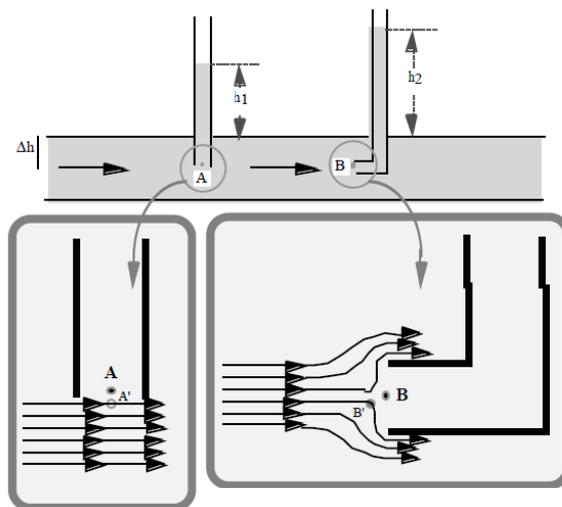
Remarque ; influence de l'orientation de l'ouverture d'un tube :

On place deux tubes dans un écoulement liquide, comme précisé sur la figure.

En A', la vitesse est celle de l'écoulement, notée v .

En B', le fluide est immobile et aucune ligne de courant ne passe.

Il y a continuité de pression entre les points A et A' et entre les points B et B'.



Le théorème de Bernoulli et le principe fondamental de la statique des fluides donne :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P_A = P_B \quad \text{et} \quad P_{am} = P_A - \rho g h_1 = P_B - \rho g h_2$$

Par conséquent, la vitesse de l'écoulement est :

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

Le choix de l'orientation des tubes permet donc, par une mesure de dénivellation, d'en déduire la vitesse du fluide.

Sonde Pitot :

On place un obstacle dans un écoulement d'air (voir figures).

On mesure la pression en un point A situé face à l'écoulement et en un point B situé sur le côté. Le théorème de Bernoulli donne, en négligeant $\rho g z$:

$$\rho \frac{v_A^2}{2} + P_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B$$

Or, la vitesse en A est nulle. On obtient ainsi :

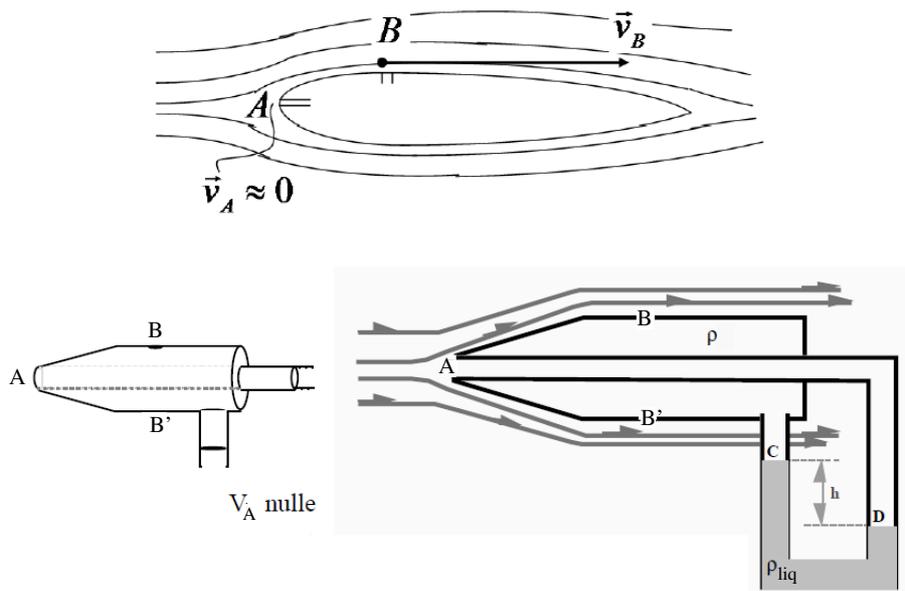
$$v_B = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}$$

Ainsi, la mesure statique de la différence de pressions ($P_A - P_B$) permet d'accéder à la mesure de la vitesse au point B, sachant que (on suppose ici que $\rho_{liq} \gg \rho$:

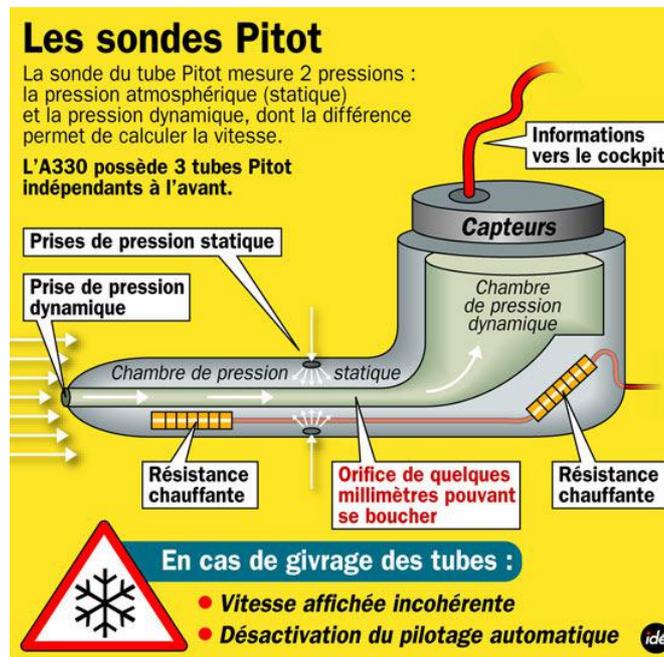
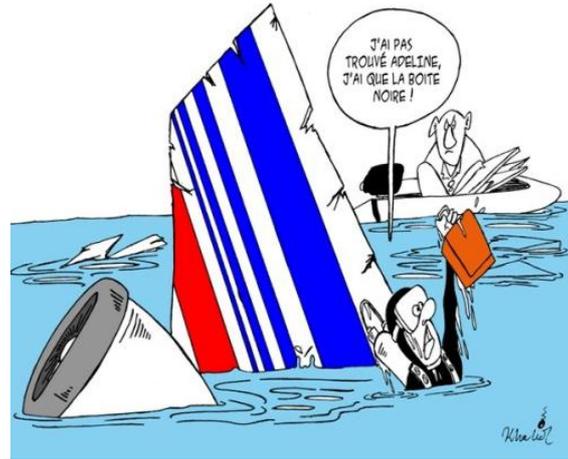
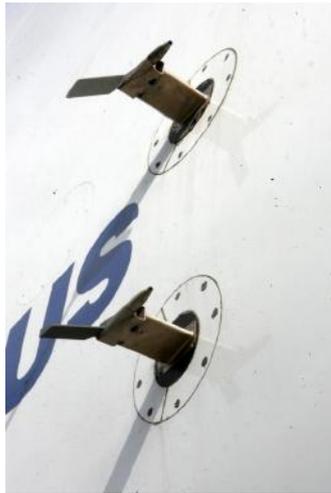
$$P_A - P_B = P_D - P_{B'} = P_D - P_C = \rho_{liq} g h$$

Il vient :

$$v_B = \sqrt{2gh \frac{\rho_{liq}}{\rho}}$$



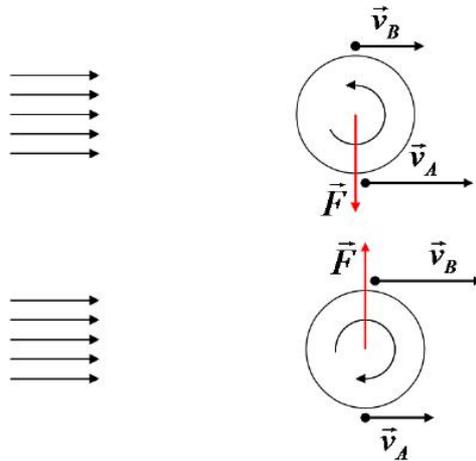
Tube de Pitot pour la mesure de la vitesse d'un écoulement.



- Effet Magnus et application aux effets dans les balles de tennis et les ballons de foot :

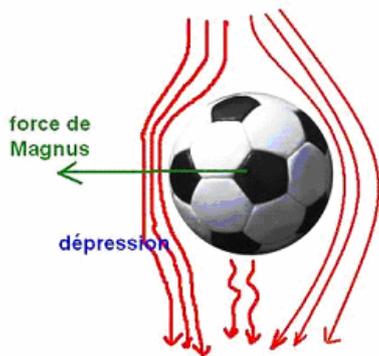
On se place dans le référentiel barycentrique du ballon : le ballon tourne donc autour d'un axe passant par le barycentre de la balle et le fluide se déplace par rapport à ce référentiel.

Cas du dessin du haut (effet lifté) : en B, la vitesse est inférieure à la vitesse en A (le point B « lutte » contre le fluide) ; par conséquent, d'après le théorème de Bernoulli, $P_B > P_A$. Il apparaît ainsi une résultante des forces de pression verticale et dirigée vers le bas. C'est l'effet Magnus. La balle va descendre plus rapidement qu'en l'absence d'effet.



*Dessin du haut : lift – Dessin du bas : slice
(Attention, les figures sont tracées dans le référentiel barycentrique de la balle).*

Dans le cas de l'effet slicé, c'est le contraire : la force résultante est vers le haut et la balle aura tendance à aller plus loin qu'en l'absence d'effet.



Exercice sur l'effet Magnus :

L'écoulement incompressible et permanent d'un fluide parfait autour d'un cylindre de rayon R en rotation de vitesse angulaire ω autour de son axe Oz est donné par le

le potentiel des vitesses en coordonnées cylindriques :

$$\varphi(r, \theta) = V \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{C}{2\pi} \theta \quad \text{dans la convention } \vec{v} = + \overline{\text{grad}} \varphi$$

où $\vec{V} = V \vec{u}_x$ est la vitesse uniforme du fluide loin du cylindre et $C = 2\pi R^2 \omega$ la circulation du vortex suite à la rotation du cylindre ; ce potentiel satisfait toutes les conditions aux limites.

a) Sachant qu'au loin $P = P_0$, donner le champ de pression $P(\theta)$ sur le cylindre.

b) À l'aide d'un dessin, prévoir d'abord qualitativement le sens de la force par unité de longueur qu'exerce le fluide en écoulement autour du cylindre, puis établir son expression $\frac{d\vec{F}}{dz} = -\rho C V \vec{u}_y$; comment peut-elle s'écrire à l'aide d'un produit vectoriel ? À quel paradoxe aboutit-on lorsque le cylindre ne tourne pas ?

Solution :

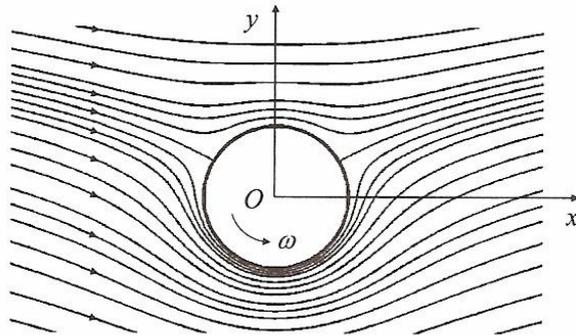
a) La vitesse est $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) V \cos \theta$ et $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V \sin \theta + \frac{C}{2\pi r}$

Le théorème de Bernoulli (forme étendue car l'écoulement est irrotationnel) appliqué entre l'infini ($v = V$, $P = P_0$) et un point quelconque de l'écoulement sur le cylindre ($r = R$) sur la même horizontale :

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho \left(-2V \sin \theta + \frac{C}{2\pi R} \right)^2 + P(\theta)$$

soit en développant :
$$P(\theta) = P_0 + \frac{1}{2} \rho V^2 - \rho \frac{C^2}{8\pi^2 R^2} + \rho \frac{VC}{2\pi R} \sin \theta - 2\rho V^2 \sin^2 \theta$$

b) La rotation du cylindre dissymétrise les lignes de courant par rapport au plan xOz . Pour $y > 0$, la rotation du cylindre contrarie l'écoulement du fluide, la vitesse diminue par rapport à V (les lignes de courant sont moins serrées) et donc la pression augmente par rapport à P_0 d'après le théorème de Bernoulli.



Pour $y < 0$, la rotation du cylindre favorise l'écoulement du fluide, la vitesse augmente (les lignes de courant sont davantage serrées) et donc la pression est plus faible. La force résultante est donc dirigée suivant $-\vec{u}_y$.

Le dessin montre aussi que les points d'arrêt se déplacent vers $\theta = \pi/2$ lorsque ω croît.

La force sur une longueur h de cylindre est $\vec{F} = - \iint P(\theta) d\vec{S}$

Des cinq termes dans l'expression de $P(\theta)$, les trois premiers, uniformes sur tout le pourtour, ne contribuent pas, le cinquième non plus par symétrie par rapport au plan yOz . Il reste, en projection sur Oy :

$$\vec{F} = - \int_0^\pi \rho \frac{VC}{2\pi R} \sin \theta \times 2\pi R d\theta \times \sin \theta \vec{u}_y \Rightarrow \vec{F}/h = -\rho CV \vec{u}_y$$

qui s'écrit sous la forme d'un produit vectoriel :

$$\vec{F}/h = 2\pi \rho R^2 \vec{V} \wedge \vec{\omega}$$

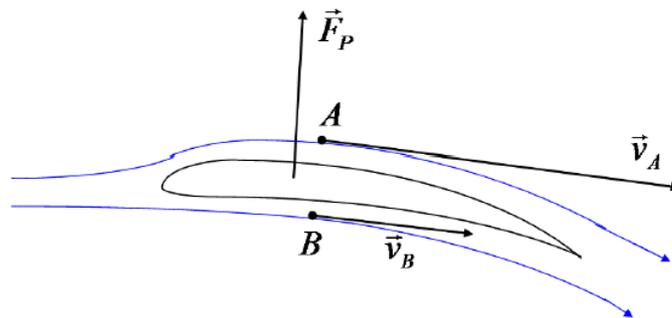
Lorsque le cylindre ne tourne pas, $\vec{\omega} = \vec{0}$, et donc $\vec{F} = \vec{0}$; le cylindre ne subit aucune force de la part du fluide parfait qui s'écoule autour de lui : c'est le paradoxe de d'Alembert, résolu par la prise en compte de la viscosité.

• **Portance des avions :**

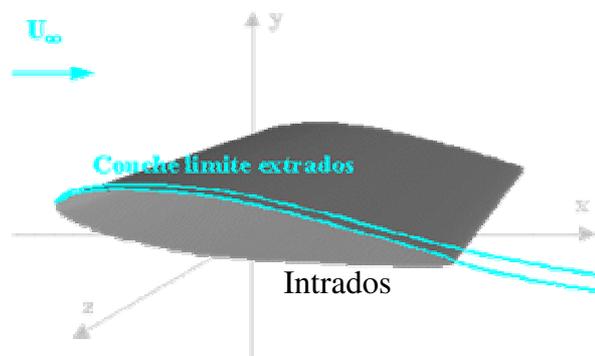
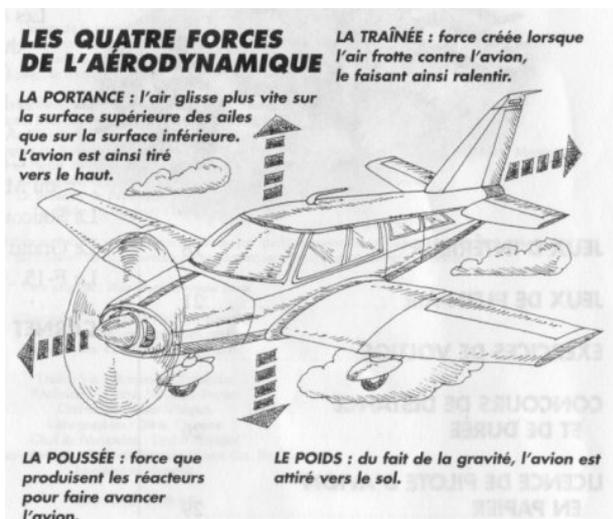
Le profil d'une aile est tel que le mouvement de l'air peut être considéré comme la somme d'une translation (avec le vecteur vitesse \vec{v}_∞ , qui représente la vitesse de l'air loin de l'aile) et d'une rotation au voisinage du profil de l'aile. Par conséquent, la vitesse résultante est plus grande sur

la face supérieure du profil que sur sa face inférieure ($v_A > v_B$). Bernouilli donne donc $P_A < P_B$, ce qui résulte en une force dirigée perpendiculairement au déplacement de l'aile, vers le haut. C'est la force de portance, \vec{F}_p . On peut montrer que cette force est proportionnelle à la *circulation du champ de vitesses autour du profil*:

$$|F_p| \propto \left| \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \right| \rho v_\infty L$$



Force de portance d'une aile.



Dans la réalité, des tourbillons peuvent se détacher de l'aile, et ainsi la partie de la circulation qu'ils emmènent est perdue pour la portance. L'effet de la turbulence de l'air implique que Bernoulli n'est pas strictement applicable. De plus, une force parallèle au déplacement de l'aile apparaît: la force de traînée, \vec{F}_t . On utilise les formules semi-empiriques suivantes pour les forces exercées sur des obstacles dans un écoulement:

$$\vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_y \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_x \vec{e}_x$$

Où ρ est la masse volumique du fluide, S l'aire d'une surface de référence de l'obstacle, v_∞ la vitesse du fluide par rapport à l'obstacle loin de celui-ci, C_y le coefficient de portance et C_x le coefficient de traînée.

Les coefficients C_x et C_y sont des nombres sans dimensions. Ils dépendent de la forme et de l'orientation de l'obstacle. Il y a deux façons de les déterminer : en faisant des essais en tunnel et par la simulation numérique. Le fait de pouvoir simuler des écoulements en faisant des essais en grandeur réduite dans des tunnels ou en soufflerie et la manière d'extrapoler ensuite vers la grandeur réelle seront examinés au paragraphe « similarité et nombre de Reynolds ».



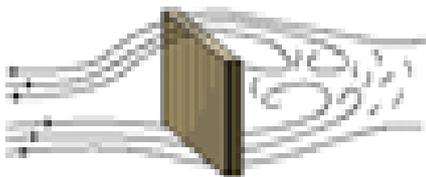
Sphère :

Les objets ronds, tels que les balles de tennis, subissent une traînée d'intensité modérée.



Aile d'avion :

La forme d'une aile d'avion réduit la traînée.



Carré :

Les objets plats à bords carrés subissent une traînée de grande intensité.

IV) Ecoulements d'un fluide réel ; viscosité d'un fluide et nombre de Reynolds :

1 – Constatations expérimentales :

La démarche consiste à partir de constatations expérimentales.

1 – Il existe une force de résistance au cisaillement du fluide. Par exemple, faire glisser deux plaques parallèles entourant un fluide nécessite l'apparition d'une force tangente aux plaques.

2 – A l'interface fluide – solide, $\vec{v}_{fluide} - \vec{v}_{solide} = \vec{0}$: par exemple, on constate que la poussière reste collée aux pâles d'un ventilateur.

Il faut ainsi tenir compte d'une force de viscosité volumique pour expliquer le résultat (1).

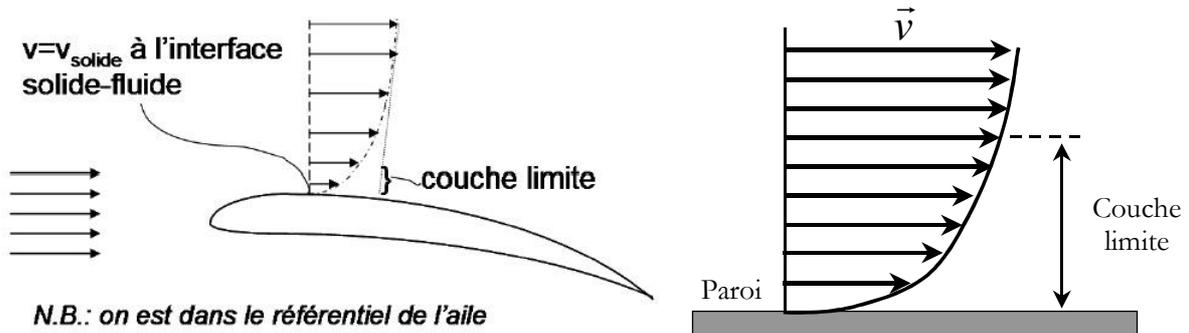
Tenir compte de (2) implique une modification des conditions aux limites :

Dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de conditions aux limites particulières pour la vitesse tangentielle d'une particule de fluide sur une paroi solide : elle peut, en particulier, être différente de 0 (la composante normale sera toujours nulle).

Pour un fluide visqueux, il faudra par contre écrire la nullité de la composante tangentielle à la surface de l'obstacle :

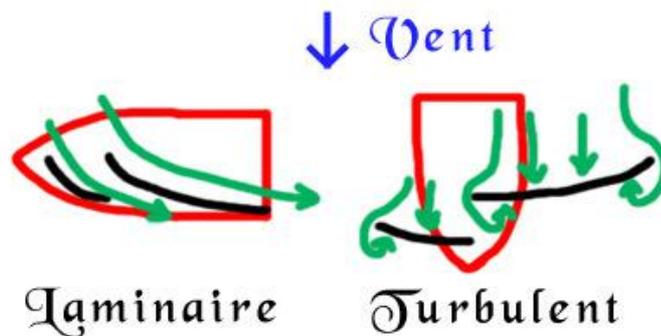
$$\vec{v}_{\text{tan}}(\text{fluide} / \text{paroi}) = \vec{0} \quad (\text{Vitesse tangentielle})$$

Il apparaît une couche limite au voisinage de l'interface solide – fluide dans laquelle la vitesse tangentielle va progressivement s'annuler.

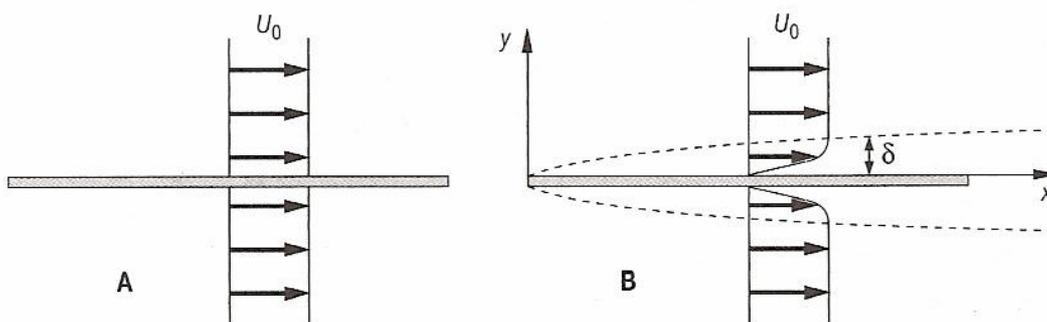


Par ailleurs, la viscosité est un processus dissipatif. Le fluide va perdre de l'énergie lors de son mouvement et les particules fluides échangent de la chaleur (processus non adiabatique).

Finalement, la différence essentielle entre fluide parfait et fluide visqueux apparaît dans l'existence de « couches limites » (plus ou moins épaisses) au contact des parois solides. A l'intérieur de ces couches, la vitesse tangentielle d'un fluide visqueux passe progressivement d'une valeur nulle (sur la paroi) à une valeur prédite de manière acceptable par le modèle du fluide parfait.



En fonction de la portion de paroi considérée, ces couches limites peuvent être laminaires ou turbulentes, avec des transitions de l'une à l'autre en des points particuliers. L'importance de la traînée dépend fortement de la structure de la couche limite.



Couche limite. A : écoulement parfait autour d'une plaque mince. B : écoulement réel ; en pointillés, l'épaisseur de la couche limite.

On considère la plaque précédente supposée carrée de côtés L , en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$.

Dans la couche limite, les frottements dominent et le terme de diffusion de quantité de mouvement est prépondérant. En dehors, c'est au contraire le terme de convection qui l'emporte.

A la surface de la couche limite, ces deux termes seront du même ordre de grandeur, soit :

$$\|\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v}\| \approx \|\eta\Delta\vec{v}\|$$

On note δ l'épaisseur de la couche limite et U_0 la vitesse du fluide loin de la couche limite :

$$\|\rho(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v}\| \approx \left| \rho v \frac{\partial}{\partial x} v \right| \approx \rho \frac{U_0^2}{L}$$

$$\|\eta\Delta\vec{v}\| \approx \eta \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right| \approx \eta \frac{U_0}{\delta^2}$$

D'où :

$$\rho \frac{U_0^2}{L} \approx \eta \frac{U_0}{\delta^2} \quad \text{soit} \quad \delta \approx \sqrt{\frac{\eta L}{\rho U_0}} \approx \sqrt{\frac{\nu L}{U_0}}$$

Le nombre de Reynolds vaut (voir paragraphe (5)) $R_e = \frac{\rho L U_0}{\eta}$, d'où l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta \approx \frac{L}{\sqrt{R_e}}$$

Par exemple, pour une aile d'avion :

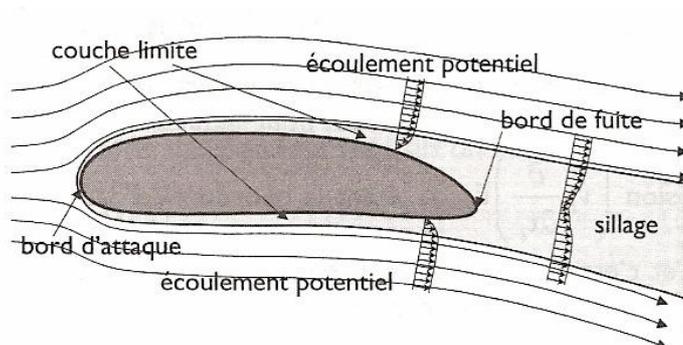
$$L = 5 \text{ m} ; U_0 = 50 \text{ m.s}^{-1} ; \nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Alors, $R_e = 1,7 \cdot 10^7$ et $\delta = 1,2 \text{ mm}$. L'épaisseur est très faible et on peut dire que le modèle de l'écoulement parfait est valable dans tout l'espace.

Par contre, si le nombre de Reynolds est faible (< 1 par exemple), alors $\delta > L$: dans ce cas, la viscosité est primordiale (écoulement par exemple de miel sur une cuillère).

Sillage :

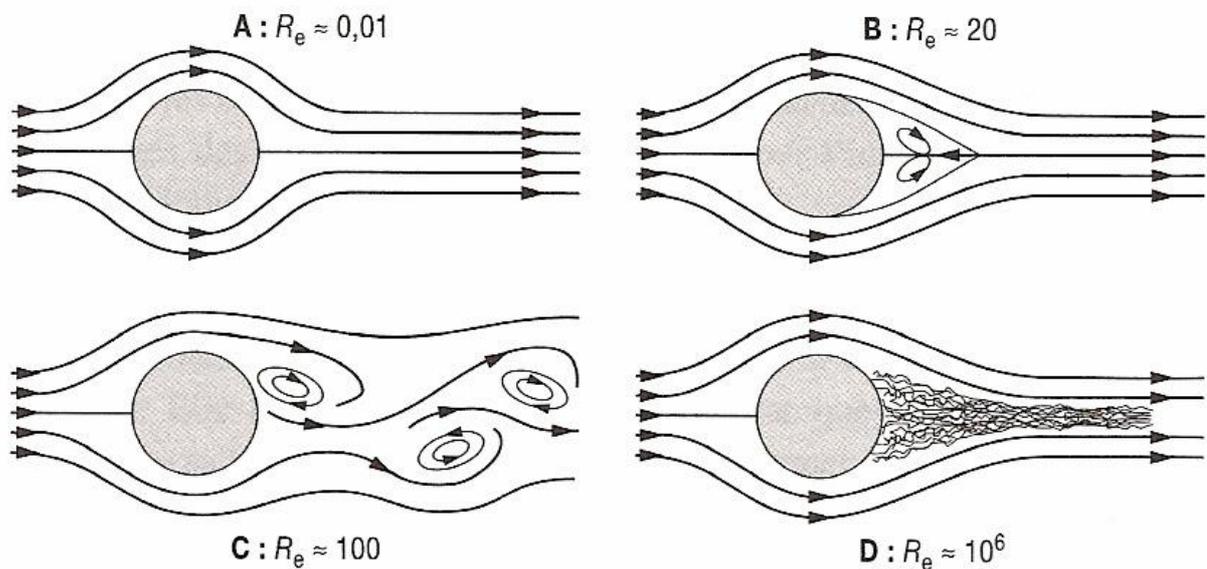
La couche limite recouvre toute la surface de l'obstacle à partir d'une ligne le long de laquelle s'est divisé le jet de fluide incident, appelée bord d'attaque. Les particules fluides qui parcourent la couche limite, après s'être séparées sur ce bord d'attaque, se retrouvent en arrière du bord de fuite qui mar-



que la limite postérieure de l'obstacle. Comme elles ont été considérablement freinées en circulant dans la couche limite (qui est par définition le lieu où la viscosité impose l'adhérence), leur mouvement est définitivement différent de celui des particules fluides qui sont restées dans l'écoulement potentiel. Elles forment en arrière du bord de fuite une zone appelée sillage qui prolonge la couche limite très loin en aval et dans laquelle le champ de vitesse reste rotationnel. Il faut se déplacer d'une distance d'au moins deux ordres de grandeur supérieure à L pour que ce sillage finisse par se « diluer » dans l'écoulement potentiel.

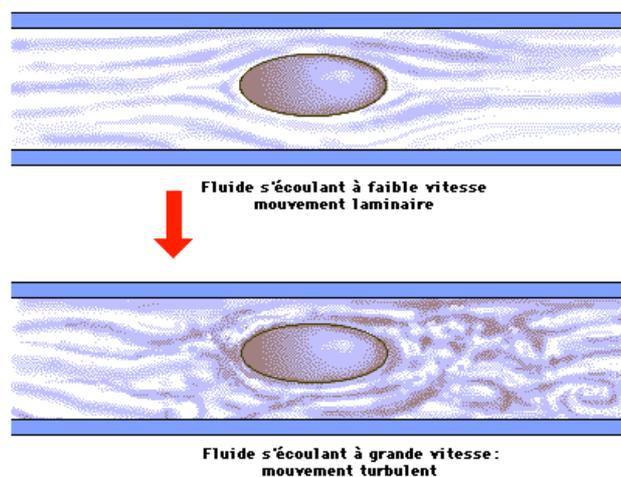
Écoulement laminaire et écoulement turbulent :

Lorsque le vecteur vitesse d'un écoulement $\vec{v}(r,t)$ varie erratiquement (d'un point à l'autre à t fixé, ou en un point donné en fonction du temps), on dit que l'écoulement est turbulent. La vitesse de l'écoulement est généralement « importante ».



Exemples d'écoulements laminaires et turbulents.

Dans le cas contraire, l'écoulement est qualifié de laminaire : il peut être décrit comme un ensemble de lames ou de couches glissant les unes sur les autres. La vitesse de l'écoulement est alors « faible ».



* Dans la couche limite, l'écoulement peut être laminaire ou turbulent.

* Dans les écoulements réels, on peut observer un décollement de la couche limite : c'est ainsi qu'apparaît le sillage dans l'écoulement autour d'une sphère. Une couche limite turbulente résiste mieux au décollement qu'une couche limite laminaire.

Exemple ; les tourbillons marginaux derrière les avions :

Toutefois, cet exemple permet également d'illustrer que l'approche bidimensionnelle n'est pas suffisante pour rendre compte de l'ensemble de l'écoulement réel sur l'aile. Celle-ci n'est en effet pas d'envergure infinie et des effets spécifiques apparaissent notamment en bout d'aile. Ils sont qualifiés « d'effets tridimensionnels » car associés à une limite de la direction privilégiée de la géométrie qui conférerait à l'approche bidimensionnelle décrite précédemment toute sa pertinence. Ces effets tridimensionnels sont caractérisés par l'apparition de tourbillons de taille importante en bout d'aile, appelés « tourbillons marginaux » (cf. figure 5). Ces derniers vont augmenter la traînée globale de l'aile en rajoutant un terme à la « traînée 2D » déterminée pour le profil. Cette traînée est appelée la « traînée induite ».

Ces tourbillons trouvent leur origine dans la différence entre les pressions régnant sur les deux faces de l'aile : si l'on revient en effet rapidement à un profil d'aile en incidence, on peut constater que les particules fluides qui passent en dessous du profil (côté « intrados ») sont ralenties, tandis que celles passant en dessus (côté « extrados ») sont accélérées, ce qui



Allure des tourbillons marginaux

conduit finalement à la présence d'une surpression à l'intrados et d'une dépression à l'extrados par rapport à la pression uniforme régnant à l'infini amont (cf. figure 6).

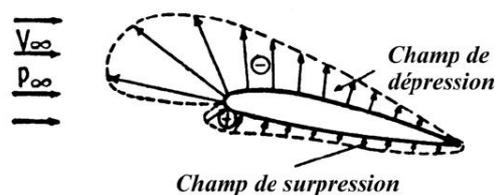


Fig. 6 – Répartition de pression classique autour d'un profil.

Cette différence de pression est d'une part à l'origine de la force de sustentation (la portance) exercée par le fluide sur le profil et qui permet aux avions de voler ; mais elle est par ailleurs responsable de mouvements « parasites » en bout d'aile où l'air va avoir tendance à passer des hautes aux basses pressions afin de les équilibrer (cf. figure 7). Si l'on combine ce mouvement au déplacement d'ensemble du fluide incident à la vitesse V_∞ , on obtient le mouvement tourbillonnaire décrit plus haut.

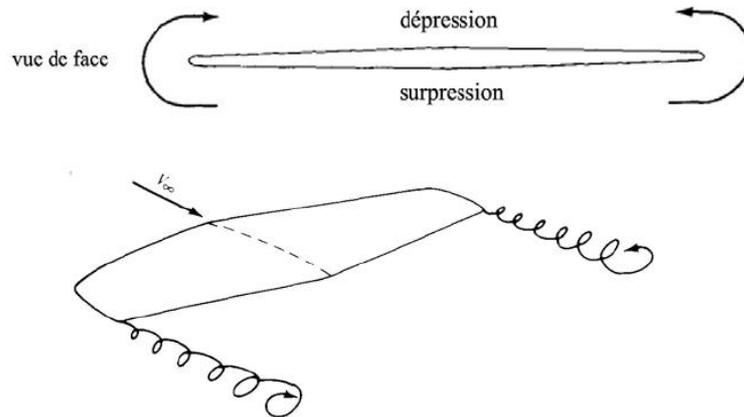


Fig. 7 – Mécanisme à l'origine des tourbillons marginaux.

La plupart des écoulements industriels sont turbulents et l'on est généralement obligé d'en tenir compte dans le modèle d'étude si l'on souhaite atteindre un degré d'analyse suffisamment fin pour optimiser un système particulier. Il est souvent indispensable de prendre en compte cet aspect : si l'on revient sur les tourbillons marginaux introduits au paragraphe précédent, on peut signaler qu'ils génèrent derrière l'avion un sillage turbulent de grande intensité qui ne se dissipe qu'après un laps de temps qui dépend de la taille de l'aéronef et qui peut atteindre plusieurs minutes. Ceci rend donc nécessaire sur les pistes des aéroports d'espacer suffisamment les décollages et les atterrissages car un avion de taille modeste qui suivrait de trop près un avion plus imposant pourrait se trouver piégé dans le sillage turbulent de ce dernier et être confronté à de graves problèmes de contrôle.

2 – Equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible (équation de Navier-Stokes) :

Le principe fondamental de la mécanique appliqué à une particule de fluide et en tenant compte de la force de viscosité conduit à l'équation de Navier – Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}, \forall \vec{x}, \forall t .$$

C'est l'équation de Navier-Stokes incompressible. On a aussi les équations

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0},$$

$$\boxed{\rho = const}.$$

La condition aux limites (interface fluide-solide) est:

$$\boxed{\vec{v} - \vec{v}_{solide} = 0}.$$

3 – Exemples de résolution de l'équation de Navier-Stokes :

a) Ecoulement de Couette plan :

Un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η , immobile entre deux plans horizontaux, est mis en mouvement par le seul déplacement du plan supérieur en $z = h$ à vitesse constante $V \vec{u}_x$.



- Proposer un champ de vitesse raisonnable, en déduire l'équation qu'il vérifie, et estimer la durée τ du régime transitoire. AN pour l'eau et $h = 1$ cm.
- Déterminer le profil de vitesse du fluide en régime stationnaire et en déduire la force surfacique qu'un opérateur doit exercer sur le plan supérieur pour le déplacer.

Solution :

- En écoulement laminaire unidirectionnel cherchons $\vec{v} = v(z,t) \vec{u}_x$ comme champ de vitesse où $v(z,t)$ est indépendant de y par invariance par translation suivant Oy et indépendant de x car l'écoulement est incompressible.

L'équation de Navier-Stokes $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \overline{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v}$ dans

laquelle $(\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}}) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x} \right) v(z,t) \vec{u}_x = \vec{0}$, et en l'absence de gradient de pression

dans la direction de l'écoulement, soit $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, donne en projection sur l'axe Ox :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0}$$

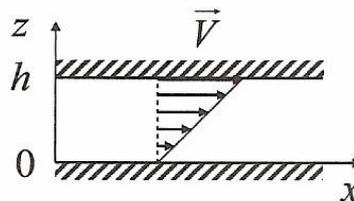
ce qui est une équation de diffusion de coefficient de diffusion $D = \nu$.

La mise en mouvement du fluide par la translation de plaque supérieure atteint la profondeur h en un temps τ , ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, et donné par $h = \sqrt{\nu \tau}$.

AN : Pour l'eau $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ d'où $\tau = 100 \text{ s} = 1 \text{ min } 40 \text{ s}$

$$v(z) = V \frac{z}{h}$$

La plaque se déplaçant à vitesse constante, la force que doit exercer l'opérateur est l'opposée de la force de viscosité qu'exerce le fluide sur la plaque :



$$\vec{F}_{op} + \vec{F}_{visc} = M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

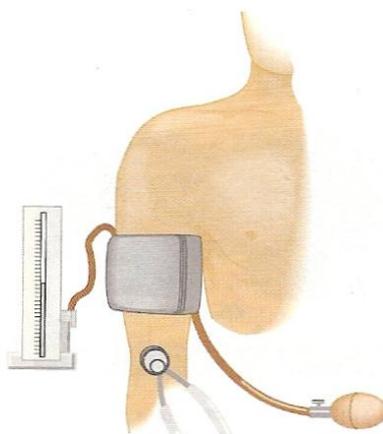
La force de viscosité sur une surface S de la plaque est exercée par le fluide inférieur d'où :

$$\vec{F}_{visc} = -\eta \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=h} S \vec{u}_x = -\eta \frac{V}{h} S \vec{u}_x \quad (\text{le fluide freine la plaque}) \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{op} = \eta \frac{S}{h} \vec{V}$$

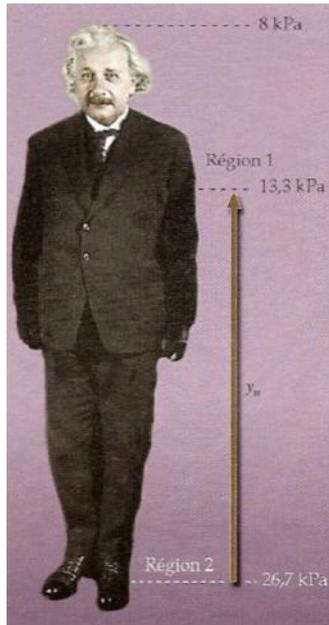
Cette force est proportionnelle à la vitesse que l'on souhaite communiquer à la plaque.

b) Ecoulement de Poiseuille :

En 1835 un médecin français, Poiseuille fit une série d'expériences pour déterminer comment un fluide visqueux s'écoule dans un tuyau droit. Son but était de comprendre la dynamique de la circulation sanguine chez l'homme sachant que le plasma sanguin se comporte comme un fluide newtonien.

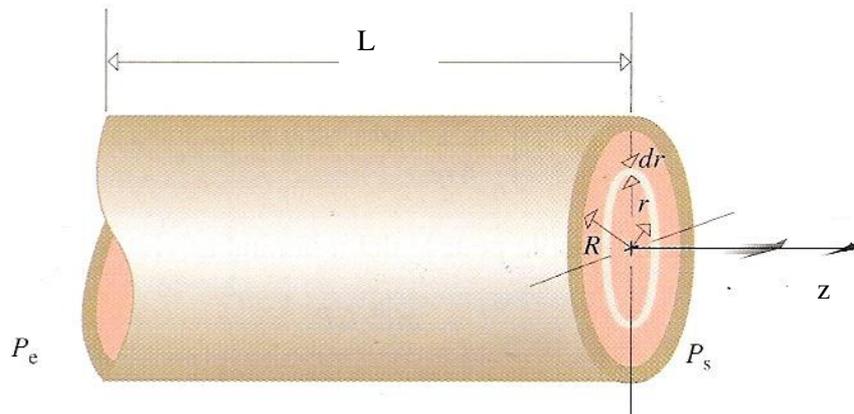


Le manomètre lit la pression dans la manchette enroulée autour du bras. La petite ampoule de caoutchouc pompe de l'air dans la manchette, augmentant la pression, jusqu'à coupure du flux sanguin dans l'artère brachiale dans le bras supérieur. La pression est libérée progressivement et, à l'aide d'un stéthoscope, on entend le sang lorsqu'il recommence à s'écouler.



La tension artérielle varie dans le corps en partie à cause de la pesanteur.

Un fluide visqueux incompressible de densité ρ s'écoule dans un tube cylindrique de longueur L et de rayon R . La pression à l'entrée du tube ($z = 0$) est P_E . La pression à la sortie du tube est P_S .



On va calculer les champs des vitesses et de pression à l'intérieur du tube.

On va chercher une solution stationnaire, négliger la pesanteur, et supposer que la vitesse peut s'écrire:

$$\vec{v} = v_z(r)\vec{e}_z$$

où on a introduit les coordonnées cylindriques (r, φ, z) . Comme dans l'exemple précédent, le mouvement des particules fluides est rectiligne uniforme, donc $d\vec{v}/dt = 0$, et l'équation de Navier-Stokes, devient :

$$0 = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v}.$$

Utilisant un formulaire pour les expressions du gradient et du laplacien en coordonnées cylindriques, on a, en projetant selon $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)\end{aligned}$$

Les 2 premières équations impliquent que la pression n'est fonction que de z : $P = P(z)$. La troisième équation a donc pour membre de gauche une fonction de z seulement, alors que son membre de droite n'est fonction que de r . La seule possibilité de satisfaire cette équation pour tout r et pour tout z est que les deux membres sont égaux à une constante. Appelons cette constante c . On a donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = c$$

dont la solution est $P(z) = cz + a$, avec a une constante d'intégration. Les conditions aux limites donnent finalement :

$$P(z) = P_E - \frac{P_E - P_S}{L} z$$

L'équation pour v_z est:

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = c.$$

Intégrant une première fois:

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{2\eta} cr^2 + b,$$

avec b constante d'intégration. Intégrant une deuxième fois:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\eta} cr^2 + b \ln r + d,$$

avec d constante d'intégration. On veut une solution non singulière sur l'axe ($r \rightarrow 0$), donc $b = 0$. La condition au bord du cylindre, $v_z(r = R) = 0$ implique

$$d = -\frac{c}{4\eta} R^2$$

et la solution pour le champ des vitesses est :

$$v_z(r) = \frac{P_E - P_S}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

La solution pour $P(z)$ et $v_z(r)$ est **donnée sur la figure**. La pression décroît linéairement le long du tube. Le profil des vitesses est parabolique.

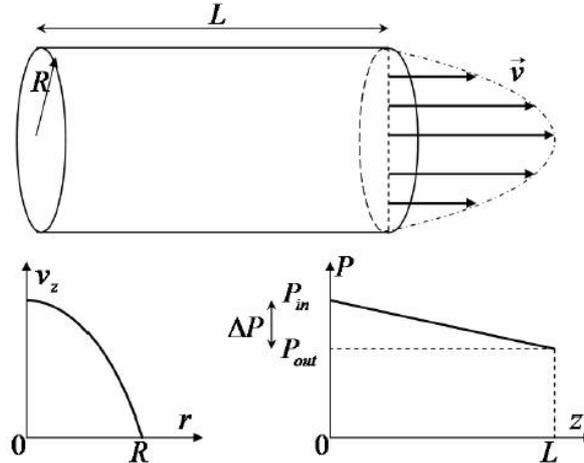
A partir de cette solution, on peut calculer le débit volumique D de l'écoulement (en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$), en notant $\Delta P = P_E - P_S$ la chute de pression dans le tube :

$$D = \int_0^r \int_0^{2\pi} v_z(r) r dr d\theta = \int_0^r 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\Delta P \pi}{\eta L} \frac{R^4}{8}$$

Cette expression donne le débit volumique pour une chute de pression donnée dans un tube de longueur L , rayon R . En résolvant pour ΔP , on obtient

$$\Delta P = \frac{8\eta LD}{\pi R^4},$$

appelée équation de Poiseuille, qui exprime la chute de pression ΔP dans un tube de longueur L , de rayon R , pour un fluide de viscosité η en écoulement stationnaire, en fonction du débit volumique D .



Écoulement de Poiseuille : écoulement dans un cylindre.

Force de frottement subie par le fluide :

Sur la paroi du cylindre, la contrainte de viscosité (par unité de surface) a pour expression :

$$\vec{f}_v = \eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r=R} \vec{u}_z$$

C'est la force qu'exerce la paroi sur le fluide qui glisse sur elle. Pour calculer la résultante de ces forces de viscosité, on écrit :

$$\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r=R} = -\frac{P_E - P_S}{2\eta L} R$$

Puis :

$$\vec{F}_v = -\eta \frac{P_E - P_S}{2\eta L} R (2\pi RL) \vec{u}_z = -\pi R^2 \Delta P \vec{u}_z$$

L'écoulement étant stationnaire, la quantité de mouvement totale du fluide contenu dans le cylindre reste constant au cours du temps, par conséquent :

$$\vec{F}_{\text{Pression à l'entrée}} + \vec{F}_{\text{Pression à l'entrée}} + \vec{F}_v = \vec{0}$$

Par conséquent :

$$\vec{F}_v = -\left(\vec{F}_{\text{Pression à l'entrée}} + \vec{F}_{\text{Pression à l'entrée}} \right) = -\left(\pi R^2 P_e - \pi R^2 P_s \right) \vec{u}_z = -\pi R^2 \Delta P \vec{u}_z$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Compléments ; le système cardio – vasculaire humain :

Masse volumique du sang (37°C)	$1,0595 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Nombre de globules rouges par mm^3 de sang	5×10^6
Nombre de globules blancs par mm^3 de sang	8×10^3
Débit du sang dans le cœur	
Au repos	$8 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ (5 litres/min)
Lors d'une intense activité	$40 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ (25 litres/min)
Temps mis par un indicateur pour circuler	18 - 24 s
Temps pour une circulation complète	54 s
Volume du sang (homme de 70 kg)	$5,2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ (5,2 litres)
Pression manométrique maximum dans le ventricule droit	3 kPa (25 mm Hg)
Pression manométrique maximum dans le ventricule gauche	16 kPa (120 mm Hg)
Pression manométrique moyenne dans les grosses veines	1,07 kPa
Pression manométrique moyenne dans les grosses artères	12,8 kPa
Pression manométrique moyenne dans le cœur	13,3 kPa
Chute de pression par cm d'aorte	4,3 Pa (10^{-2} mm Hg)
Puissance de fonctionnement du cœur au repos	$\approx 10 \text{ W}$

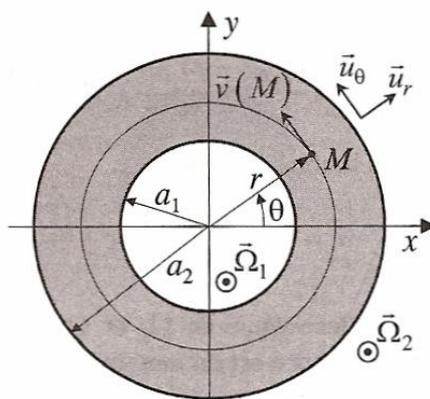
c) Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux :

On considère un système de deux cylindres coaxiaux de longueur infinie, d'axe Oz , de rayons respectifs a_1 et $a_2 > a_1$, en rotation uniforme autour de leur axe aux vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2 . Le cylindre extérieur étant creux, on place un fluide homogène incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique μ et on recherche une solution stationnaire laminaire. Pour cela, on écrit que le fluide est entraîné par la rotation des cylindres et, du fait des invariances relativement à Oz , on adopte en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_\theta \text{ ainsi que } P(M) = P(r).$$

Cette fois, le terme inertiel n'est pas nul :

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}})\vec{v} &= \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} \\ &= \left(\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v(r)\vec{u}_\theta) \\ &= \frac{v^2}{r} \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r \end{aligned}$$



mais cela n'empêche pas une résolution aisée. En effet, le laplacien du champ de vitesse a pour expression :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (v(r) \vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_\theta}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_\theta - \frac{v}{r^2} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

et, le gradient de pression se réduisant à $\overline{\text{grad}P} = \frac{dP}{dr} \vec{u}_r$, les projections de l'équation de Navier-Stokes donnent les deux équations :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \frac{v}{r^2} = 0 = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}.$$

La seconde étant linéaire (parce que le terme inertiel a une projection nulle sur \vec{u}_θ), elle permet d'obtenir le champ de vitesse. On constate en effet que si v est une puissance de r les trois termes de l'équation sont de même degré, ce qui permet une mise en facteur. On pose donc $v = r^\alpha$ sans se préoccuper pour l'instant des problèmes d'homogénéité, ce qui donne :

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = [\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1] r^{\alpha-2} = [\alpha^2 - 1] r^{\alpha-2} = 0.$$

On en déduit $\alpha = \pm 1$ et la linéarité de l'équation fait de la solution générale une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières :

$$v = Ar + \frac{B}{r}.$$

Il reste à utiliser les conditions aux limites pour déterminer les deux constantes d'intégration. L'adhérence aux parois impose en effet :

$$v(a_1) = Aa_1 + \frac{B}{a_1} = \Omega_1 a_1 \quad \text{et}$$

$$v(a_2) = Aa_2 + \frac{B}{a_2} = \Omega_2 a_2.$$

On en déduit rapidement :

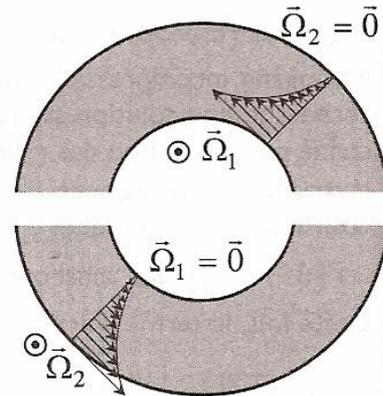
$$A = \frac{\Omega_2 a_2^2 - \Omega_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}, \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}$$

d'où la solution finale :

$$v = \frac{\Omega_2 a_2^2 - \Omega_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) a_1^2 a_2^2}{(a_2^2 - a_1^2) r}.$$

Selon les valeurs de Ω_1 et Ω_2 , les profils de vitesse sont différents. Si par exemple un seul cylindre est en mouvement on obtient l'un des deux profils ci-contre.

L'équation $\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr}$ permet ensuite d'obtenir le champ de pression, mais, à la diffé-



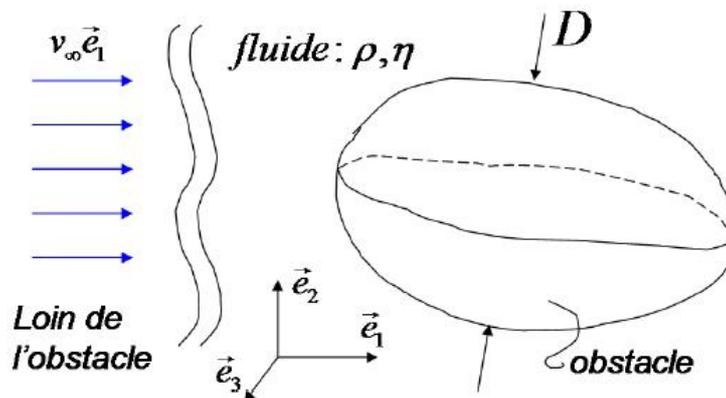
rence des deux exemples précédents, ce n'est pas la pression qui est le moteur de l'écoulement (c'est le mouvement des cylindres) et nous ne chercherons pas P . Le calcul se fait sans difficulté mais n'est pas utile. On remarquera seulement que la dérivée $\frac{dP}{dr}$ est partout positive et que la pression augmente par conséquent monotonement avec r . C'est ce qui permet dans le référentiel d'une particule fluide de compenser la force d'inertie centrifuge.

Nous n'avons pas eu besoin dans cet exemple d'utiliser l'équation de continuité pour déterminer le champ de vitesse car une expression de la forme $v(r)\vec{u}_\theta$, choisie du fait des propriétés de symétrie, la vérifie automatiquement.

4 – Similarité et nombre de Reynolds (Hors programme) :

a) Introduction :

On constate que, mis à part les quelques cas que l'on peut résoudre analytiquement, il est très difficile de résoudre les équations du mouvement d'un fluide visqueux.



Écoulement autour d'un obstacle.

Le but est de faire des essais d'aérodynamique ou d'hydrodynamique avec des **modèles réduits**. Par exemple, il peut s'agir d'une maquette d'avion dans un tunnel d'essais aérodynamique. On aimerait connaître l'écoulement de l'air, et aussi quelle sera la résultante des forces exercées par l'air sur l'avion (portance, traînée).

La question est: comment se rapporter au cas grandeur nature? Comment l'écoulement autour du modèle réduit peut-il me renseigner sur l'écoulement autour du modèle en grandeur nature?

Le cadre de ce qui suit est l'étude des écoulements d'un fluide visqueux incompressible autour d'un obstacle solide fixe de forme donnée et d'orientation donnée. Les paramètres de cet écoulement sont: v_∞ , la vitesse du fluide loin de l'obstacle; ρ , η , la densité et la viscosité du fluide; D la taille (p.ex. le diamètre) de l'objet, sa forme et son orientation. Soit 4 paramètres, en plus de la forme et de l'orientation.

b) Equations normalisées et nombre de Reynolds :

Dans cette section, on démontre que l'on peut écrire les équations de Navier-Stokes, dans des unités bien choisies, où n'apparaît qu'un seul paramètre. La méthode est d'utiliser des grandeurs sans dimension. La 1^{ère} étape est de partir de l'équation de Navier – Stokes en divisant par ρ sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{rot \vec{v}} \wedge \vec{v} + \frac{1}{2} \overline{grad}(v^2) = -\frac{1}{\rho} \overline{grad} P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Le rapport η/ρ s'appelle viscosité dynamique

Substance	$\eta [kg m^{-1} s^{-1}]$	$\eta/\rho [m^2 s^{-1}]$
eau	10^{-3}	10^{-6}
air	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}
glycérine	0.85	6.8×10^{-4}

Soit, en faisant intervenir le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{rot}(\vec{v})$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \frac{1}{2} \overline{grad}(v^2) = -\frac{1}{\rho} \overline{grad} P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

On prend le rotationnel de l'expression précédente. On obtient (sachant que le rotationnel d'un gradient est nul) :

$$2 \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + 2 \overline{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \overline{rot}(\Delta \vec{v})$$

Or :

$$\overline{rot}(\overline{rot}(\vec{v})) = \overline{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}$$

Soit, avec $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{rot}(\vec{v})$ et $\text{div}(\vec{v}) = 0$ (fluide incompressible) :

$$2 \overline{rot}(\vec{\Omega}) = -\Delta \vec{v}$$

Puis :

$$2 \overline{rot}(\overline{rot}(\vec{\Omega})) = -\overline{rot}(\Delta \vec{v}) = 2 \left[\overline{grad}(\text{div} \vec{\Omega}) - \Delta \vec{\Omega} \right]$$

La divergence d'un rotationnel étant nul, il vient finalement que :

$$\overline{rot}(\Delta \vec{v}) = 2 \Delta \vec{\Omega}$$

Et l'équation de Navier – Stokes devient :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \overline{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{\Omega}$$

On rappelle les conditions aux limites:

$$\vec{v} = 0$$

à la surface de l'objet, et

$$\boxed{\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{v} = v_\infty \vec{e}_1}.$$

Définissons les unités suivantes:

- D , unité de longueur,
- D/v_∞ , unité de temps, et
- ρD^3 , unité de masse.

On en déduit ainsi que

- v_∞ est l'unité de vitesse.

Définissons des grandeurs normalisées \vec{x}', \vec{v}', t' , telles que

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}' D, \quad \vec{v} = \vec{v}' v_\infty, \quad t = t' \frac{D}{v_\infty}}.$$

Ce sont des grandeurs sans dimensions. L'équation vérifiée par le vecteur tourbillon devient :

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{D} \vec{\nabla}'; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_\infty}{D} \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{1}{D} \vec{\nabla}' \wedge v_\infty \vec{v}' = \frac{v_\infty}{D} \vec{\Omega}' \Rightarrow \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \frac{v_\infty^2}{D^2} \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{D} \frac{v_\infty}{D} v_\infty \vec{\nabla}' \wedge (\vec{\Omega}' \wedge \vec{v}') = \frac{v_\infty^2}{D^2} \vec{\nabla}' \wedge (\vec{\Omega}' \wedge \vec{v}')$$

$$\Delta \vec{\Omega} = \frac{1}{D^2} \frac{v_\infty}{D} \Delta \vec{\Omega}' = \frac{v_\infty}{D^3} \Delta \vec{\Omega}'$$

Alors, en substituant dans l'équation vérifiée par le vecteur tourbillon et en simplifiant par v_∞^2 / D^2 :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \wedge (\vec{\Omega}' \wedge \vec{v}') = \frac{\eta}{\rho D v_\infty} \Delta \vec{\Omega}'$$

Les conditions aux limites, pour ces champs normalisés, sont

$$\boxed{\vec{v}' = 0}$$

à la surface de l'objet, et

$$\boxed{\lim_{|\vec{x}'| \rightarrow \infty} \vec{v}' = \vec{e}_1}.$$

Ainsi, ces équations pour le champ normalisé $\vec{\Omega}' = \frac{D}{v_\infty} \vec{\Omega}$ ne dépendent donc que d'un seul paramètre, sans dimensions, appelé nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{\rho D v_\infty}{\eta}$$

c) Écoulements similaires :

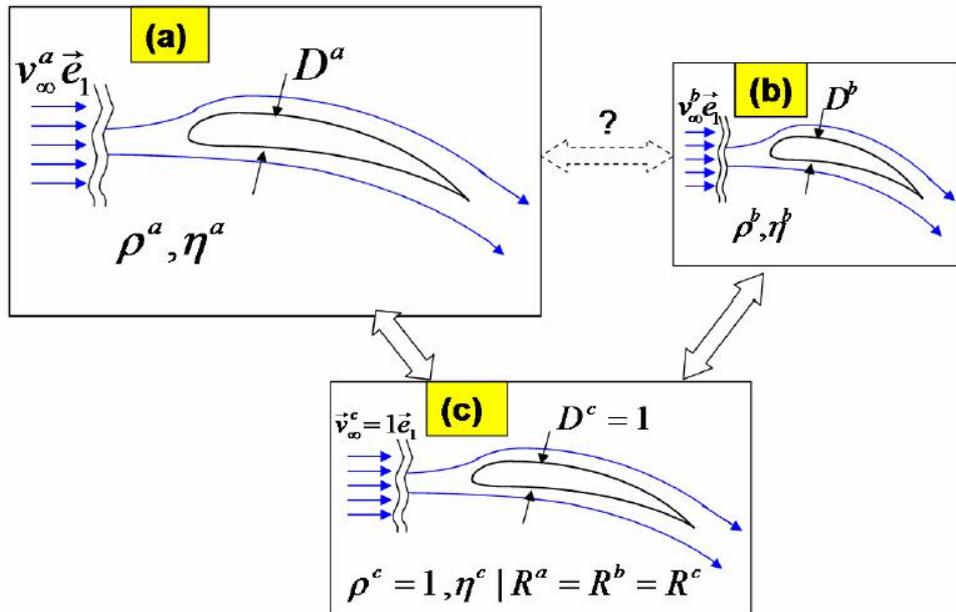
Soit (a) une aile dans un écoulement fluide (“grandeur nature”) et (b) une autre aile, de même forme et orientation, dans un autre écoulement d’un autre fluide (“modèle réduit”).

Le cas (a) est caractérisé par les paramètres v_∞^a , D^a , η^a et ρ^a . Le cas (b) est caractérisé par les paramètres v_∞^b , D^b , η^b et ρ^b . Soit \mathcal{R}^a le nombre de Reynolds de l’écoulement “grandeur nature”:

$$R^a = \frac{\rho^a D^a v_\infty^a}{\eta^a}$$

Si on choisit les paramètres de la simulation (b) (“modèle réduit”) de telle sorte qu’il ait le même nombre de Reynolds que l’écoulement (a) (“grandeur nature”),

$$\boxed{\mathcal{R}^b = \mathcal{R}^a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\rho^b D^b v_\infty^b}{\eta^b} = \frac{\rho^a D^a v_\infty^a}{\eta^a}},$$



Écoulement autour d’une aile grandeur nature (a) ; écoulement autour d’une aile modèle réduit (b) ; écoulement dans l’espace normalisés (c). Les écoulements sont similaires s’ils ont le même nombre de Reynolds.

alors les écoulements (a) et (b) sont **similaires**, c’est-à-dire qu’une fois obtenu l’un, on peut obtenir l’autre par des facteurs d’échelle. Plus précisément:

Soient \vec{x}^a , \vec{x}^b tels que

$$\frac{\vec{x}^a}{D^a} = \frac{\vec{x}^b}{D^b}.$$

Soient t^a, t^b tels que

$$\frac{t^a}{D^a/v_\infty^a} = \frac{t^b}{D^b/v_\infty^b} .$$

Alors

$$\boxed{\frac{\vec{v}^a}{v_\infty^a} = \frac{\vec{v}^b}{v_\infty^b}} .$$

En effet, on a montré au paragraphe précédent que ces écoulements, ayant le même nombre de Reynolds, étaient décrits par la même équation normalisée.

En particulier, les lignes de courant seront les mêmes (au facteur de proportionnalité D^a / D^b près). Une photographie instantanée des lignes de courant de l'écoulement (b) est identique à celle de l'écoulement (a).

Supposons que l'on mesure une force \vec{F}^b (par exemple, une force de portance et de traînée sur une aile) exercée par le fluide (b) sur l'obstacle « modèle réduit ». Quelle est la force que l'on peut prédire pour \vec{F}^a dans le cas (a) « grandeur nature » ?

Il suffit de considérer les unités pour la force. Dans le système MKSA, il s'agit de Newton, donc de $kg\ m\ s^{-2}$, autrement dit masse \times longueur \times (temps) $^{-2}$. L'unité pour la force est donc $(\rho D^3) \times (D) \times (D/v_\infty)^{-2} = \rho v_\infty^2 D^2$. La force, mesurée dans les unités normalisées, sera donc

$$\vec{F}^{nb} = \frac{1}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b$$

Or, les écoulements (a) et (b) étant similaires, on a la même force normalisée:

$$\vec{F}^{na} = \vec{F}^{nb} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^a (v_\infty^a)^2 (D^a)^2} \vec{F}^a = \frac{1}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b$$

et donc

$$\boxed{\vec{F}^a = \frac{\rho^a (v_\infty^a)^2 (D^a)^2}{\rho^b (v_\infty^b)^2 (D^b)^2} \vec{F}^b} .$$

Cette équation exprime la force prédite pour le cas "grandeur nature", \vec{F}^a , en fonction de la force mesurée sur le modèle réduit, \vec{F}^b , et des paramètres des deux écoulements. Attention, ceci est vrai **pour autant que les deux écoulements aient le même nombre de Reynolds!**

La force normalisée \vec{F}^n ne dépend que

- du nombre de Reynolds \mathcal{R}
- de la forme de l'obstacle (aile, etc)
- de l'orientation de l'obstacle par rapport à \vec{v}_∞

On peut donc écrire

$$\vec{F} = \rho v_\infty^2 D^2 \vec{F}^n(\mathcal{R}, \text{forme}, \text{orientation})$$

Traditionnellement, on prend un plan de référence lié à l'obstacle, et on définit $D = \sqrt{S}$, où S est l'aire de la surface de référence (intersection du plan de référence avec l'obstacle). On définit alors l'angle d'incidence i comme l'angle entre \vec{v}_∞ et le plan de référence, et des coefficients de traînée C_x et de portance C_y tels que

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S (C_x(\mathcal{R}, i, \text{forme}) \vec{e}_1 + C_y(\mathcal{R}, i, \text{forme}) \vec{e}_2)$$

Le but des essais en tunnel aéro/hydro-dynamique (ou des simulations numériques) est d'obtenir ces coefficients C_x et C_y en fonction des paramètres : nombre de Reynolds R_e , angle d'incidence i et forme de l'objet. Une fois les C_x et C_y connus, les expressions précédentes permettent de prédire quelles seront les forces dans le cas « grandeur nature ».

Compléments ; régimes d'écoulement dans un canal et nombre de Froude :

Le nombre de Froude, de l'hydrodynamicien anglais William Froude, est un nombre adimensionnel qui caractérise dans un fluide l'importance relative des forces liées à la vitesse et à la force de pesanteur.

Ce nombre apparaît essentiellement dans les phénomènes à surface libre, en particulier dans les études de cours d'eau, de barrages, de ports et de navires (architecture navale). Il est également important dans la météorologie pour l'écoulement en montagnes.

Si le fluide ne peut être assimilé à un fluide parfait, il faut aussi prendre en compte le nombre de Reynolds.

Le nombre de Froude F_r pour un canal rectangulaire est défini par :

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

où v est la vitesse de l'écoulement, g l'accélération de la pesanteur et h une dimension linéaire caractéristique du phénomène.

Exemple :

L'eau est assimilée à un fluide parfait, incompressible, de masse volumique ρ . Elle s'écoule dans un canal de section droite rectangulaire, de largeur ℓ constante et de profondeur h .

La surface libre est en contact avec l'air atmosphérique à la pression P_0 . L'écoulement est supposé permanent, irrotationnel et de direction horizontale ($x'x$). Le champ de pesanteur est uniforme.

a) Montrer que la quantité :

$$H = h + \frac{v^2}{2g}$$

est constante le long de l'écoulement.

b) On note $\sigma = \frac{q_v}{\ell}$ le débit volumique par unité de largeur. Exprimer $\sigma(h)$ et mettre en évidence, pour un débit donné, l'existence de deux régimes d'écoulements possibles.

On introduit le nombre de Froude :

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

L'écoulement est dit fluvial ou torrentiel selon que F_r est inférieur ou supérieur à 1.

Identifier les deux régimes d'écoulement obtenus à la question précédente.

Interpréter énergétiquement F_r .

Solution :

a) On peut appliquer le théorème de Bernoulli (écoulement stationnaire, incompressible, irrotationnel) :

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = cste$$

On choisit l'origine de l'axe vertical (orienté vers le haut) au fond du canal. Par conséquent, en notant h_0 la profondeur pour $x = 0$ (au début du canal) :

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho gh_0$$

Soit :

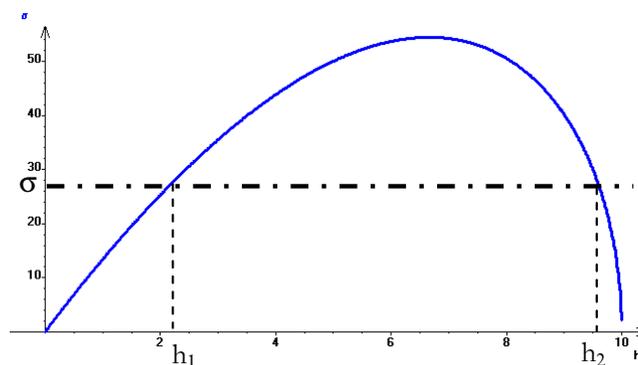
$$\frac{1}{2g} v^2 + h = \frac{1}{2g} v_0^2 + h_0 = H$$

On remarque que gH représente la somme de l'énergie cinétique massique et de l'énergie potentielle massique de pesanteur.

b) En une abscisse x donnée, la vitesse est uniforme. Le débit volumique par unité de largeur est alors :

$$\sigma = \frac{q_v}{\ell} = \frac{1}{\ell} (vh\ell) = vh = h\sqrt{2g(H-h)}$$

L'allure du débit en fonction de h est donnée sur la figure.



Le maximum de σ vaut $\sigma_{\max} = \left(\frac{2H}{3}\right)^{3/2} \sqrt{g}$ et il est obtenu pour $h_m = \frac{2}{3}H$.

On voit que pour un débit donné (plus petit que σ_{\max}) va correspondre deux valeurs de profondeurs h_1 et h_2 et donc deux valeurs de vitesse :

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h_1)} \quad \text{et} \quad v_2 = \sqrt{2g(H-h_2)}$$

Le couple (v_1, h_1) correspond à $F_r > 1$: régime torrentiel (grande vitesse, faible profondeur)

Le couple (v_2, h_2) correspond à $F_r < 1$: régime fluvial (faible vitesse, grande profondeur)

On remarque que :

$$F_r^2 = \frac{v^2}{gh} = 2 \frac{\rho v^2 / 2}{\rho gh} = 2 \frac{\text{énergie cinétique massique}}{\text{énergie potentielle massique de pesanteur}}$$

Ainsi, pour un cours d'eau, un même débit peut être obtenu de deux façons différentes :

$F_r > 1$: régime torrentiel, avec une faible hauteur d'eau et une forte vitesse (équivalent d'un régime supersonique). Dans ce régime, le fluide est "tiré" par les forces qui le meuvent (la gravité le plus souvent), sans que la masse de fluide en avant soit une gêne.

$F_r < 1$: régime fluvial, avec une forte hauteur d'eau et une faible vitesse (équivalent d'un écoulement subsonique). Ce régime est "pilote par l'aval" : le comportement des particules en mouvement est contraint par celles qui les précèdent.

5 – Autre définition du nombre de Reynolds et interprétation :

La complexité de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v}, \forall \vec{x}, \forall t.$$

est due essentiellement à deux termes :

- Le terme de convection de quantité de mouvement $\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$, qui rend l'équation non linéaire.
- Le terme de diffusion visqueuse $\eta \Delta \vec{v}$ dû au transfert de quantité de mouvement, qui introduit des dérivées du second ordre.

On considère un écoulement dont les paramètres sont v_∞ (vitesse du fluide loin de l'obstacle) et D une taille caractéristique (la longueur de l'obstacle, par exemple). L'ordre de grandeur du rapport du terme convectif sur le terme de diffusion vaut :

$$\frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \approx \frac{\rho \frac{v_\infty^2}{D}}{\eta \frac{v_\infty}{D^2}} = \frac{\rho D v_\infty}{\eta}$$

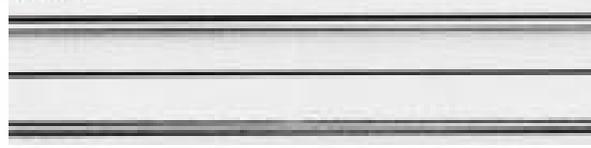
Avec $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (viscosité dynamique du fluide) :

$$\frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \approx \frac{D v_\infty}{\nu} = R_e$$

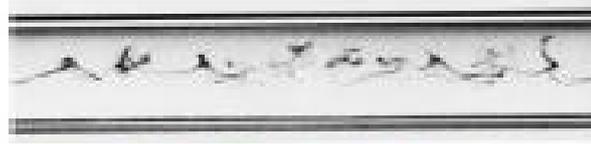
On retrouve l'expression du nombre de Reynolds R_e défini précédemment.

L'expérience montre que si $R_e < 2000$, l'écoulement est laminaire alors que si $R_e > 2000$, il devient facilement turbulent.

$R_e < 2\,000$: écoulement laminaire



$R_e > 4\,000$: écoulement turbulent



$2\,000 < R_e < 4\,000$: écoulement instable, entre le régime laminaire et le régime turbulent



Pour un nombre de Reynolds élevé, les transferts de quantité de mouvement par convection sont plus importants que ceux par diffusion ; cela signifie que le temps caractéristique associé à ces transferts par convection est plus court que celui par diffusion. Tout se passe comme si la viscosité du fluide était nulle. Le fluide a un comportement de fluide parfait et son mouvement est régi par l'équation d'Euler :

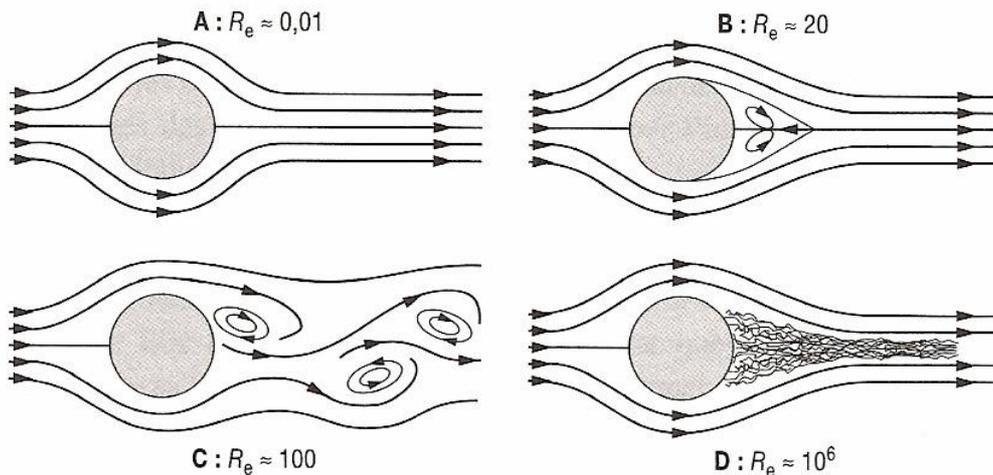
$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad}P + \vec{f}_v$$

L'épaisseur de la couche limite $\delta \approx \frac{L}{\sqrt{R_e}}$ est alors faible.

Pour un nombre de Reynolds faible, les transferts de quantité de mouvement par diffusion sont plus importants que ceux par convection ; le temps caractéristique associé à ces transferts par diffusion est plus court que par convection. L'équation de Navier-Stokes devient alors :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}P + \vec{f}_v + \eta \Delta \vec{v}$$

Les écoulements dominés par la viscosité sont toujours des écoulements très lents avec une longueur caractéristique très courte (sève dans les pores des arbres) ou impliquant des fluides très visqueux (écoulements de lave).

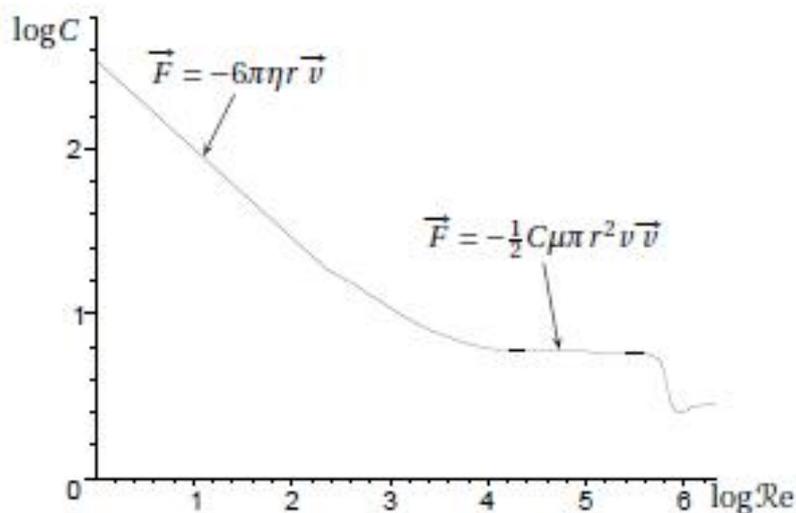


Exemples d'écoulements laminaires ou turbulents selon la valeur du nombre de Reynolds.

Le terme convectif est non linéaire : l'apparition de turbulences a lieu pour des nombres de Reynolds élevés, donc lorsque le terme non linéaire l'emporte nettement sur le terme linéaire (dû à l'aspect diffusif de l'écoulement, c'est-à-dire à la viscosité). C'est donc bien l'aspect non linéaire de l'écoulement qui favorise les turbulences.

6 - Ecoulement autour d'une sphère :

Un fluide exerce sur une sphère en mouvement une force opposée à sa vitesse, appelée « traînée ». On note μ la masse volumique du fluide, η sa viscosité, r le rayon de la sphère et \vec{v} sa vitesse.



Evolution du C_x en fonction du nombre de Reynolds (échelle logarithmique).

* Si $R_e < 1$: la force de traînée est donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

C'est la force traditionnelle de frottement fluide, proportionnelle à la vitesse et de sens opposé à celle - ci.

* Si $10^3 < R_e < 10^6$: la force de traînée est donnée par :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \mu \pi r^2 v \vec{v}$$

où C_x est le coefficient de traînée (sans dimension), qui dépend de la texture de la sphère. On retrouve une force de frottement de type quadratique (proportionnelle au carré de la vitesse).

* En dehors de ces deux domaines, il n'existe pas de loi simple donnant l'expression de la force de traînée.

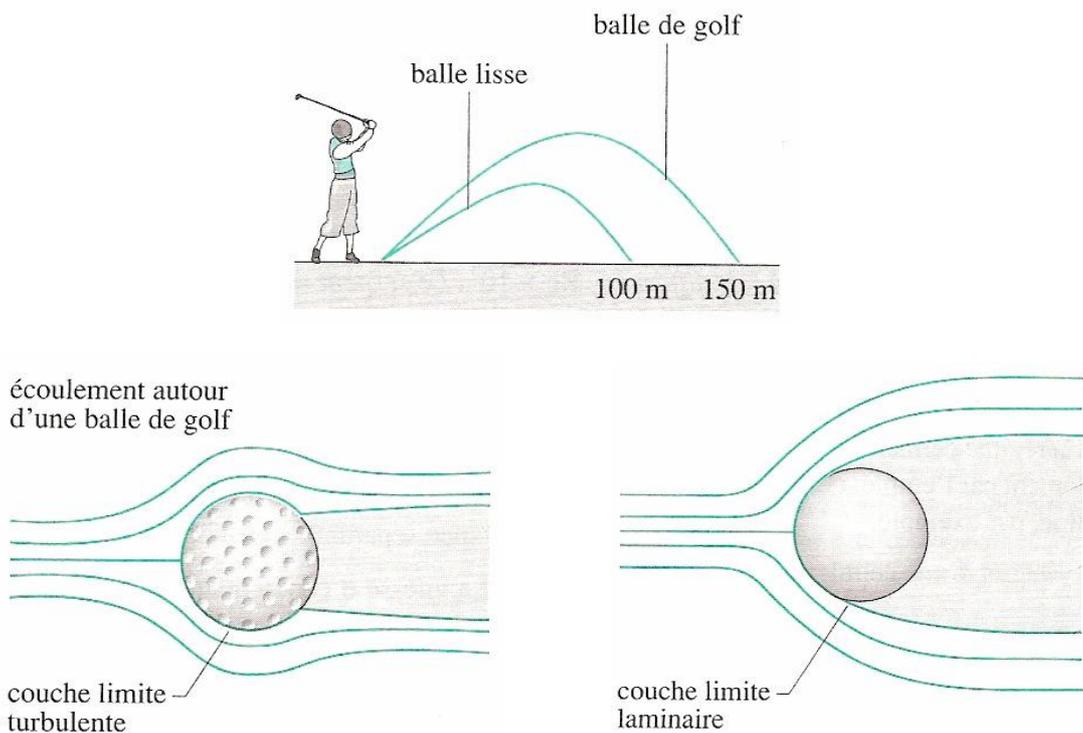
* La seconde formule se généralise pour tout type d'objet :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \mu S v \vec{v}$$

où S est la surface de l'objet projetée dans un plan perpendiculaire à la vitesse.

* Lorsque le nombre de Reynolds augmente, il apparaît un sillage derrière la sphère, constitué d'abord de tourbillons, puis devenant turbulents pour $R_e > 10^3$. Un sillage turbulent dissipe beaucoup plus d'énergie.

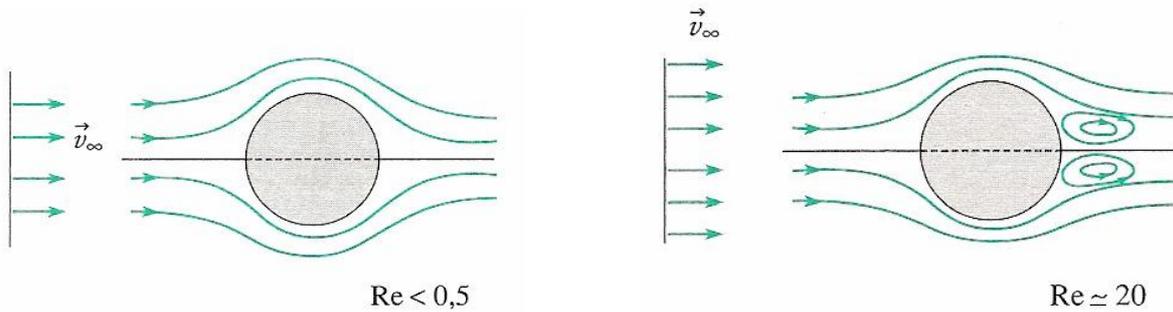
* Pour $R_e = 10^6$, la taille du sillage diminue fortement, entraînant une chute du coefficient de traînée. Voici pourquoi une balle de golf est bosselée.



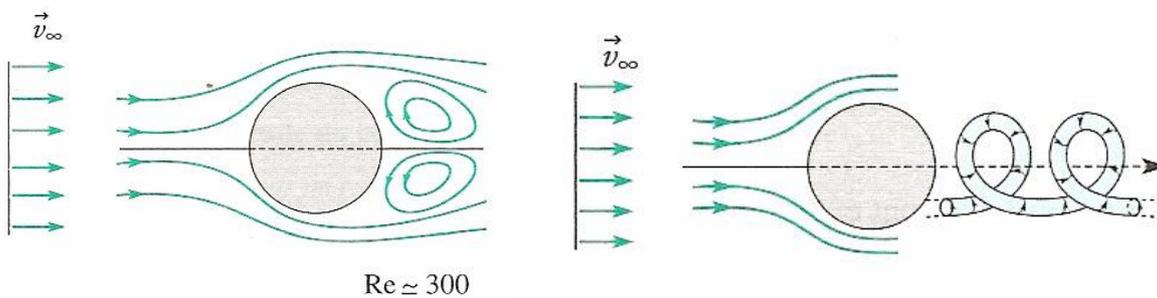
En effet, dans les conditions d'utilisation, le nombre de Reynolds d'une balle de golf est supérieur à 10^6 . Les balles de golf sont bosselées de façon à augmenter les turbulences, pour leur permettre d'aller plus loin. Ainsi, dans les mêmes conditions de lancement, une balle de golf peut atteindre une distance de 150 m, alors que cette distance ne serait que de 100 m avec une balle lisse.

Les irrégularités permettent d'obtenir autour de la sphère une couche limite turbulente alors que celle-ci est laminaire pour une surface lisse. Lorsque la couche limite est turbulente, la résistance au mouvement est plus faible.

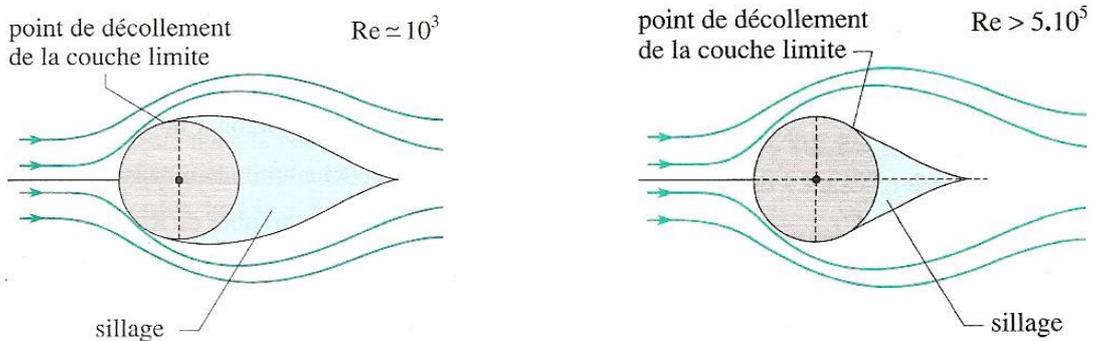
Description qualitative de l'écoulement autour d'une sphère :



*A gauche : pour un nombre de Reynolds faible, l'écoulement est laminaire et quasi-linéaire.
 A droite : le tourbillon apparaissant derrière la sphère est torique.*



*A gauche : quand Re augmente, le tourbillon finit par occuper la partie aval de la sphère.
 A droite : le tourbillon torique précédent se détache en prenant une forme hélicoïdale.*



*A gauche : l'écoulement n'est plus régulier. La couche limite est laminaire, mais une zone turbulente se développe derrière la sphère. Le point de décrochement de la couche limite est situé « en avant ».
 A droite : la couche limite laminaire précédente est devenue turbulente ; elle se décroche à « l'arrière » de la sphère. Le sillage est réduit et la résistance moindre.*

Exercice ; écoulement non stationnaire autour d'une sphère :

Un fluide parfait s'écoule horizontalement d'un mouvement de translation parallèle à l'axe Oz ; on note $\vec{u}(t) = u(t)\vec{u}_z$ sa vitesse. On introduit une sphère solide de rayon R , maintenue immobile, son centre O étant l'origine des coordonnées sphéri-

ques. Alors le fluide acquiert une vitesse dérivant d'un potentiel Φ ($\vec{v} = -\overline{\text{grad}} \Phi$), vérifiant $\Delta\Phi = 0$ et défini en un point M du fluide tel que $\overline{OM} = \vec{r}$ par :

$$\Phi = -\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \vec{u}(t) \cdot \vec{r}$$

- Quelles propriétés cela traduit-il pour le fluide et son écoulement ?
- Déterminer les composantes de la vitesse du fluide en un point M . Examiner les conditions aux limites et commenter.
- Montrer (en négligeant les effets de pesanteur) qu'une certaine quantité, homogène à une pression, et contenant la masse volumique ρ , la vitesse v , la pression P et le potentiel Φ est une « constante » notée K .
- En déduire la force exercée par le fluide sur la sphère. Commenter ce résultat.

Solution :

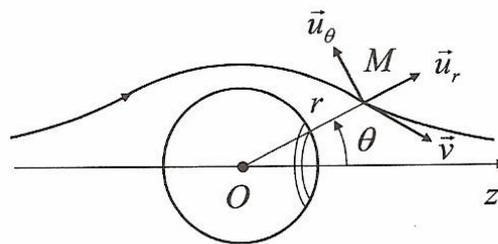
- a) Avec $\vec{u}(t) \cdot \vec{r} = u(t)r \cos \theta$, le potentiel s'écrit : $\Phi = -\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right) u(t) \cos \theta$.

La propriété $\Delta\Phi = 0$ qui se vérifie facilement avec en coordonnées sphériques :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

s'écrit $\Delta\Phi = \overline{\text{div grad}} \Phi = 0$ soit $\overline{\text{div}} \vec{v} = 0$, ce qui traduit que l'écoulement est incompressible. Par ailleurs, le fait que l'écoulement soit potentiel ($\vec{v} = -\overline{\text{grad}} \Phi$), soit $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, signifie qu'il est irrotationnel (il ne peut donc pas s'agir d'un fluide visqueux dont l'écoulement le long d'un obstacle est rotationnel).

$$\text{b) } \begin{cases} v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) u(t) \cos \theta \\ v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) u(t) \sin \theta \\ v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$



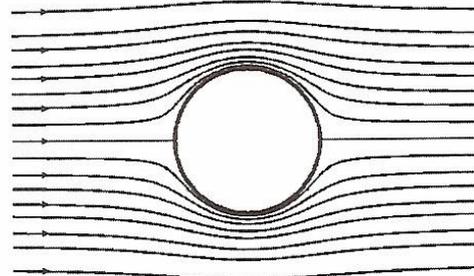
On constate bien sur le dessin que pour $\theta < \pi/2$, $v_r > 0$ et $v_\theta < 0$.

* pour $r \rightarrow \infty$,

$v_r \rightarrow u(t) \cos \theta$ et $v_\theta \rightarrow -u(t) \sin \theta$, soit $\vec{v}_\infty = \vec{u}(t)$ et ceci $\forall \theta$; loin de la sphère l'écoulement n'est pas perturbé.

* pour $r = R$,

$v_r = 0$ et $v_\theta = -\frac{3}{2} u(t) \sin \theta$; la vitesse normale (soit v_r) sur la sphère est nulle, et la vitesse tangentielle (soit



v_θ) non nulle, le fluide parfait peut glisser sur la sphère, sauf en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, où $\vec{v} = \vec{0}$ (ce sont des points d'arrêt). On note que la vitesse est maximale pour $\theta = \pm \pi/2$, c'est donc là que les lignes de courants sont les plus serrées.

c) On part de l'équation d'Euler : $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overline{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = -\overline{\text{grad}} P$

Et comme $\rho = \text{cste}$ et $\vec{v} = -\overline{\text{grad}} \Phi$, il vient $\overline{\text{grad}} \left(-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P \right) = \vec{0}$

$$\text{soit } \boxed{\rho \frac{v^2}{2} + P - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = K(t)}$$

Il s'agit du théorème de Bernoulli généralisé au cas d'un écoulement irrotationnel non permanent ; de ce fait $K(t)$ est une constante dans tout l'espace, mais qui varie à chaque instant.

d) Il faut d'abord déterminer la pression sur la sphère.

En $r = R$, $\rho \frac{v_\theta^2}{2} + P(\theta, t) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=R} = K(t)$, soit avec les expressions précédentes :

$$P(\theta, t) = K(t) - \frac{9}{8} \rho u^2(t) \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \rho R \frac{du}{dt} \cos \theta$$

La force sur la sphère est $\vec{F}(t) = -\iint P(\theta, t) \overline{dS} = -\iint P(\theta, t) dS \cos \theta \vec{u}_z$

car $\overline{dS} = dS \vec{u}_r$ et vu, à θ donné, la symétrie de révolution autour de l'axe Oz (indépendance en φ), la résultante est portée par Oz .

Choisissons pour surface la couronne d'axe Oz , de rayon $R \sin \theta$ et d'épaisseur $R d\theta$ représentée sur la figure de la question b), alors

$$\vec{F}(t) = - \int_0^\pi \left[K(t) - \frac{9}{8} \rho u^2(t) \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \rho R \frac{du}{dt} \cos \theta \right] 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \vec{u}_z$$

Les deux premiers termes du crochet sont invariants dans la transformation $\theta \rightarrow \pi - \theta$ alors que $\sin \theta \cos \theta$ change de signe dans cette transformation : leur contribution à l'intégrale est donc nulle. Ce n'est pas le cas du troisième qui change également de signe dans cette transformation ; il reste

$$\vec{F}(t) = -\frac{3}{2} \rho R \frac{du}{dt} 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta d(\cos \theta) \vec{u}_z$$

l'intégrale vaut $-\frac{2}{3}$, d'où la résultante $\boxed{\vec{F}(t) = 2\pi \rho R^3 \frac{d\vec{u}}{dt}}$

La force qu'exerce le fluide sur la sphère par son contournement est nulle en écoulement stationnaire, ce qui constitue le paradoxe de d'Alembert.

V) Bilans dynamiques et thermodynamiques :

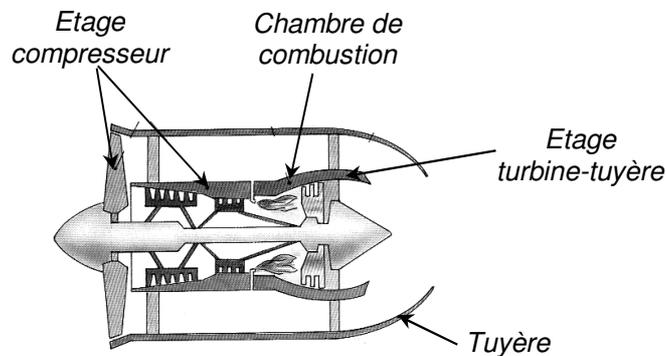
1 – Système fermé, système ouvert :

- Système fermé : il est constitué d'une quantité de matière déterminée que l'on suit dans son mouvement ; la surface (S) qui le délimite peut se déformer et se déplacer dans le référentiel d'étude.
- Système ouvert : on raisonne sur des « surfaces de contrôle » (S), délimitant des volumes de contrôles (V), fixes dans le référentiel choisi ; il peut alors y avoir un flux de matière à

travers la frontière du système entre l'intérieur et l'extérieur. Ces systèmes sont bien adaptés à la méthode eulérienne.

2 – Bilans d'énergie interne et d'enthalpie (exemple du moteur à réaction) :

Dans un moteur à réaction, un gaz (assimilé à l'air supposé parfait) parcourt un cycle que l'on considérera tout d'abord comme étant réversible. Il pénètre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2 et la température vaut alors T_2 (état (2)). Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3 , la pression restant égale à P_2 (la sortie de la chambre de combustion est représentée par l'état (3)). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2). Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)). Le gaz est rejeté avec la vitesse c (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1 . On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.



Données numériques : $T_1 = 290 \text{ K}$, $P_1 = 1 \text{ bar}$, $P_2 / P_1 = 5$. La température du gaz à l'entrée de la turbine est $T_3 = 1300 \text{ K}$. L'air est considéré comme étant un gaz diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. La constante R des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} . \text{mol}^{-1}$.

Les applications numériques demandées sont relatives à l'unité de masse (ici, 1 kg) et les grandeurs extensives correspondantes seront notées par des lettres minuscules (s_m pour l'entropie, h_m pour l'enthalpie, e_{cm} pour l'énergie cinétique macroscopique, ...).

L'unité de masse d'air qui rentre dans le compresseur ne reçoit, de la part de celui-ci, qu'un travail mécanique noté w_m (avec $w_m > 0$).

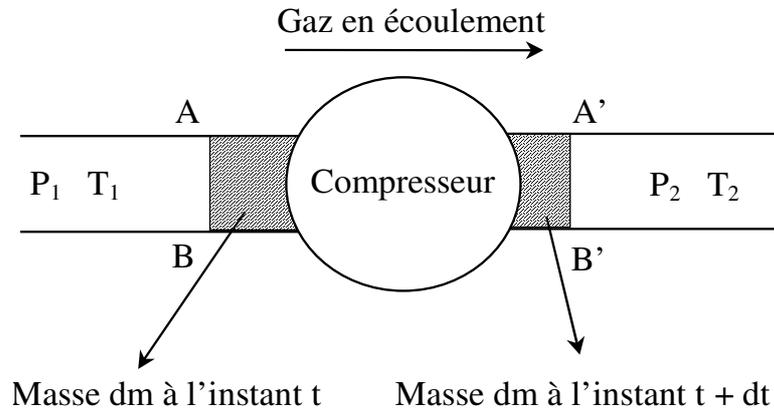
On considère à l'instant t le système fermé constitué du gaz compris dans le compresseur et de la masse dm de gaz (dans l'état P_1 et T_1) qui va rentrer, pendant l'intervalle de temps dt , dans le compresseur. A l'instant $t + dt$, ce système est constitué de la même quantité de gaz comprise dans le compresseur et de la même masse dm de gaz qui est sortie, étant désormais dans les conditions P_2 et T_2 .

Le 1^{er} principe appliqué à ce système (en négligeant l'énergie cinétique macroscopique) s'écrit :

$$\begin{aligned} (U_{\text{gaz dans le compresseur}} + (dm)u_{m,2}) - (U_{\text{gaz dans le compresseur}} + (dm)u_{m,1}) \\ = P_1(dm v_{m,1}) - P_2(dm v_{m,2}) + (dm)w_m \end{aligned}$$

Avec :

- $U_{\text{gaz dans le compresseur}}$, l'énergie interne du gaz constamment contenu dans le compresseur ; elle est constante en régime stationnaire.



- $u_{m,1}$ et $u_{m,2}$ désignent les énergies internes massiques et $v_{m,1}$ et $v_{m,2}$ les volumes massiques de l'air dans les états (1) et (2) respectivement.
- la quantité $P_1(dm v_{m,1}) - P_2(dm v_{m,2})$ représente le travail des forces de pressions extérieures au système, à l'entrée et à la sortie de la machine (encore appelé travail de transvasement).
- Enfin, le transfert thermique reçu par le système est nul puisque, d'une part, le compresseur est calorifugé et, d'autre part, il n'y a pas de transfert de chaleur par conduction entre la masse qui rentre ou qui sort de la machine et son environnement immédiat puisque les températures sont identiques (et égales à T_1 ou T_2).

En remarquant que $h_m = u_m + P v_m$ représente l'enthalpie massique, on aboutit finalement au bilan énergétique suivant :

$$h_{m,2} - h_{m,1} = w_m$$

Le bilan énergétique dans la tuyère s'écrit maintenant, puisque l'énergie cinétique macroscopique en sortie $e_{cm,5}$ n'est plus négligeable (et avec des notations semblables à celles de la question (2)) :

$$\begin{aligned} (U_{\text{gaz dans la tuyère}} + (dm)u_{m,5} + (dm)e_{cm,5}) - (U_{\text{gaz dans la tuyère}} + (dm)u_{m,4}) \\ = P_4(dm v_{m,4}) - P_1(dm v_{m,5}) \end{aligned}$$

Soit, finalement :

$$(h_{m,5} - h_{m,4}) + e_{cm,5} = 0 \quad \text{d'où} \quad e_{cm,5} = -(h_{m,5} - h_{m,4}) = -\frac{7}{2}r(T_5 - T_4)$$

D'une manière générale (en régime permanent) :

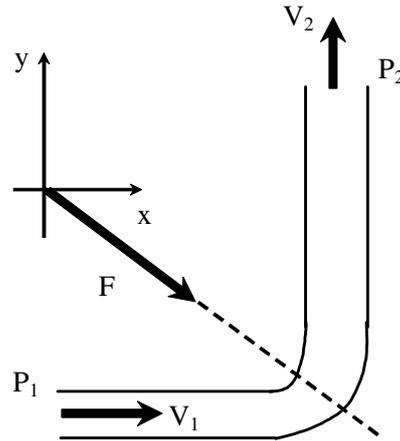
$$\Delta h_m + \Delta e_{c,macro} + \Delta e_{p,ext} = w_m + q_{th}$$

3 – Bilans de quantité de mouvement :

a) Force subie par un coude de canalisation :

De l'eau de masse volumique μ coule en régime stationnaire avec un débit massique D_m dans une canalisation horizontale de section constante S faisant un coude d'angle droit. On néglige la pesanteur et l'écoulement est supposé parfait.

Loin du coude en amont, la pression est uniforme et vaut P_1 et l'écoulement est unidimensionnel de vitesse $v_1 \vec{u}_x$. Loin du coude en aval, la pression uniforme vaut P_2 et la vitesse $v_2 \vec{u}_y$.



- Calculs de v_2 et de P_2 :

On raisonne sur le système fermé suivant : le contenu de tube coudé et une masse δm_1 qui rentre en amont entre les instants t et $t + dt$. La conservation de la masse donne :

$$m(t) + \delta m_1 = m(t + dt) + \delta m_2$$

où $m(t)$ et $m(t + dt)$ désignent la masse de fluide dans le tube aux instants t et $t + dt$.

Par ailleurs, $\delta m_1 = \mu S v_1 dt$ et $\delta m_2 = \mu S v_2 dt$, ainsi :

$$m(t + dt) - m(t) = \mu S (v_1 - v_2) dt$$

L'écoulement est ici stationnaire ($m(t + dt) = m(t)$), par conséquent :

$$\mu S (v_1 - v_2) dt = 0 \quad \text{soit} \quad v_1 = v_2$$

Le théorème de Bernoulli (valable ici car l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible, homogène) donne (le tube est horizontal !) :

$$\frac{1}{2} \mu v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} \mu v_2^2 + P_2 \quad \text{soit} \quad P_1 = P_2 = P_0$$

- Calcul de la force subie par la canalisation (bilan de quantité de mouvement) :

La force \vec{F} exercée par l'eau sur la canalisation est égale à l'opposée $-\vec{F}$ de la force exercée par la canalisation sur l'eau. En l'absence de viscosité, il s'agit aussi de la résultante des forces de pression sur la paroi latérale (Γ) de la canalisation. Un bilan de quantité de mouvement sur l'eau contenue dans la canalisation permet de calculer cette force.

On considère le même système fermé que précédemment, entre les instants t et $t + dt$.

La variation de quantité de mouvement de ce système vaut :

$$D\vec{p} = \left[\vec{p}(t + dt) + (\delta m_2)v_2\vec{u}_y \right] - \left[\vec{p}(t) + (\delta m_1)v_1\vec{u}_x \right]$$

En régime stationnaire, $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t)$ et $\delta m_1 = \delta m_2 = \mu S v dt$ ($v = v_1 = v_2$), par conséquent :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \mu S v^2 (\vec{u}_y - \vec{u}_x)$$

Le fluide est soumis aux forces : le poids (négligé), à la force $-\vec{F}$ et aux forces de pression à l'entrée ($P_0 S \vec{u}_x$) et à la sortie ($-P_0 S \vec{u}_y$) du tube.

Le théorème de la résultante cinétique donne :

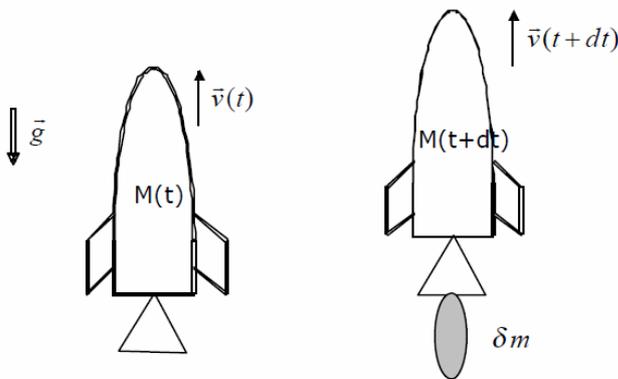
$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \mu S v^2 (\vec{u}_y - \vec{u}_x) = -\vec{F} + P_0 S (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$$

On en déduit la force exercée par l'eau sur la canalisation :

$$\vec{F} = (P_0 S + \mu S v^2) (\vec{u}_x - \vec{u}_y)$$

La direction de la force était attendue ; cette force est la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur la canalisation. Sa direction et son sens montrent qu'au voisinage du coude, il existe une surpression sur le bord extérieur de la canalisation par rapport au bord intérieur

b) Poussée d'une fusée et chariot qui perd son chargement :



On considère une fusée, dont la masse à un instant t quelconque est notée $M(t)$. Elle éjecte des gaz avec un débit massique D constant; la vitesse d'éjection des gaz, par rapport à la fusée, a pour module u . La masse initiale de la fusée est notée M_0 . La fusée constitue donc un système **ouvert**.

- Nous allons définir un système **fermé** en considérant la fusée à un instant **particulier** t ; à l'instant $t+dt$, le même système sera constitué de la fusée à l'instant $t+dt$ **et** de la quantité de gaz éjecté pendant le temps dt , de masse $\delta m = D \times dt$.

Un bilan de quantité de mouvement permet d'écrire :

$$\vec{p}^F(t) = \vec{p}(t) = M(t)\vec{v}(t) \quad \text{et} \quad \vec{p}^F(t + dt) = \vec{p}(t + dt) + [\vec{v}(t) + \vec{u}] \delta m = M(t + dt)\vec{v}(t + dt) + [\vec{v}(t) + \vec{u}] \delta m$$

En projetant sur un axe vertical orienté vers le haut, il vient :

$$dp^F(t) = p^F(t + dt) - p^F(t) = dp(t) + [v(t) - u] \delta m = d[M(t)v(t)] + [v(t) - u] \delta m$$

En divisant par $dt \rightarrow 0$ et en remarquant que $\frac{dM(t)}{dt} = -\frac{\delta m}{dt} = -D$, on a :

$$\frac{dp^F(t)}{dt} = M(t) \frac{dv(t)}{dt} - Du = F_{ext} = -M(t)g \quad (\text{application du PFD au système fermé}) \Rightarrow$$

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} = Du - M(t)g : \text{ dans cette relation, « } D \times u \text{ » (en } N \text{) apparaît comme une force}$$

supplémentaire s'exerçant sur le système **ouvert** : on l'appelle « **force de poussée** ».

• Avec $M(t) = M_0 - Dt$ et en prenant une vitesse initiale nulle, l'intégration conduit à :

$$dv(t) = \frac{Du}{M_0 - Dt} dt - gdt \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = u \times \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Dt}\right) - gt} \quad (\text{cas où } u = \text{cste})$$

Voir exercices (notamment l'exercice : « Il pleut sur un chariot »).

4 – Retour sur l'écoulement de Poiseuille cylindrique :

On applique le TRC au système constitué du fluide contenu dans le cylindre de rayon $r < R$ à l'instant t et de la masse dm_1 qui y rentre entre t et $t + dt$. A l'instant $t + dt$, ce système est constitué du fluide contenu dans le cylindre de rayon r à $t + dt$ et de la masse dm_2 qui en sort entre t et $t + dt$.

Si l'on se place dans le cadre du régime permanent, la variation de quantité de mouvement du système est alors simplement nulle.

Le bilan des forces s'écrit alors :

$$(P_e \pi r^2 \vec{u}_z - P_s \pi r^2 \vec{u}_z) + \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \vec{u}_z \right) = \vec{0}$$

D'où :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_e - P_s}{2\eta L} r$$

Par intégration, en tenant compte de $v(R) = 0$:

$$v(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

On retrouve bien l'expression de la vitesse de l'écoulement obtenue à partir de l'équation de Navier – Stokes.

On peut, par un raisonnement énergétique, déterminer la puissance des forces de viscosité qui s'applique sur la conduite.

En régime permanent, la variation d'énergie cinétique du système précédent est nulle, par conséquent, en termes de puissance :

$$P_{\text{forces de pression}} + P_{\text{viscosité}} = 0$$

Soit :

$$P_e v S - P_s v S + P_{\text{viscosité}} = 0$$

D'où :

$$P_{\text{viscosité}} = -D_v (P_e - P_s)$$

On définit la vitesse moyenne v_m de l'écoulement par $D_v = \pi R^2 v_m$, d'où (avec $\Delta P = \frac{8\eta L D_v}{\pi R^4}$) :

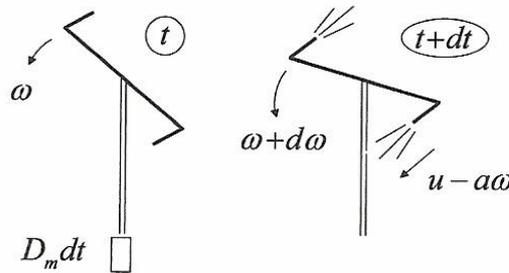
$$P_{\text{viscosité}} = -8\pi\eta L v_m^2$$

5 – Bilans de moment cinétique (le tourniquet hydraulique) :

Un tourniquet est constitué de deux bras de longueur a et d'extrémité recourbée. L'eau arrive par un conduit central avec un débit massique D_m et est éjectée avec une vitesse relative u par rapport au tourniquet dont la vitesse de rotation par rapport à son axe est ω . Effectuer un bilan de moment cinétique et, en l'absence de moment extérieur par rapport à l'axe, établir la loi $\omega(t)$ sachant que $\omega(t=0) = 0$; commentaires.

Solution :

Le système fermé considéré à l'instant t est constitué du tourniquet, de l'eau à l'intérieur du dispositif et de la masse d'eau $D_m dt$ qui y est admise entre les instants t et $t + dt$. À l'instant $t + dt$, cette même quantité d'eau se répartit dans l'appareil et à la sortie des deux bras, où sa vitesse dans le référentiel d'étude est de $u - a\omega > 0$ vers l'arrière.



La variation du moment cinétique par rapport à l'axe Δ de ce système fermé entre t et $t + dt$ s'évalue ainsi :

$$d\sigma_{\Delta} = \left[J_{\Delta}(\omega + d\omega) - (D_m dt a^2) \frac{u - a\omega}{a} \right] - [J_{\Delta}\omega + 0]$$

en notant J_{Δ} le moment d'inertie du dispositif avec eau, celui de la masse entrante sur l'axe étant nul et celui de la masse éjectée à une distance a de l'axe étant $D_m dt a^2$

$$d\sigma_{\Delta} = J_{\Delta} d\omega - D_m a(u - a\omega) dt \text{ et par unité de temps } \frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} - D_m a(u - a\omega)$$

Le théorème du moment cinétique scalaire appliqué à ce système fermé s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \mathfrak{M}_{\Delta}^{\text{ext}} \text{ où } \mathfrak{M}_{\Delta}^{\text{ext}} \text{ est la somme des moments par rapport à } \Delta \text{ des forces}$$

extérieures s'appliquant sur le système, d'où
$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}_{\Delta}^{\text{ext}} + D_m a(u - a\omega)$$

En comparaison avec l'écriture habituelle, on constate que l'éjection d'eau vers l'arrière contribue à donner au système un moment positif. En l'absence de frottement et sachant que le moment du poids par rapport à l'axe est nul, il ne reste que :

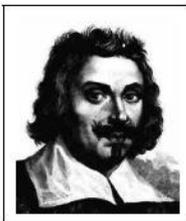
$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{D_m a^2}{J_{\Delta}} \omega = \frac{D_m a u}{J_{\Delta}} \Rightarrow \omega(t) = \frac{u}{a} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{J_{\Delta}}{D_m a^2}$$



Quelques grands physiciens de la mécanique des fluides



ARCHIMEDE (287–212 av JC) – philosophe et savant grec né à Syracuse en Sicile, fils d'un astronome, ami d'Hieron II, roi de Syracuse. Il suit à Alexandrie les leçons d'Euclide. De retour à Syracuse, il suit les travaux d'aménagement portuaire et de fortification de la cité. Hieron lui demande de vérifier si sa couronne d'or n'avait pas été falsifiée par addition d'argent, Archimède trouve le moyen de procéder à cette vérification en prenant son bain. Frappé par le fait que ses membres semblaient diminuer de poids lorsqu'ils étaient plongés dans l'eau, il s'élanche tout nu dans la rue en s'écriant : «Eureka» (j'ai trouvé!). Il étudie la statique, établit rigoureusement les lois des leviers («Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde») et améliore notablement les catapultes qui défendent Syracuse face aux Romains. L'observation directe, approfondie par des pesées lui permet d'établir les lois générales de l'hydrostatique, dont le fameux théorème qui porte son nom et qu'il énonce en termes mathématiques dans son «Traité des corps flottants». Citons parmi ses autres travaux l'invention de la vis hydraulique encore en usage et la détermination du barycentre de nombreux solides géométriques grâce à la méthode d'exhaustion. L'œuvre d'Archimède constitue le fonds inépuisable des mathématiciens de la Renaissance, prélude à nos connaissances modernes de géométrie et de mécanique physique. Dans le domaine de la mécanique des fluides, vingt et un siècles plus tard, sa théorie de la stabilité des corps flottants est toujours d'actualité.



Evangelista TORRICELLI (1608–1647) – élève et disciple de Galilée, il applique les principes du maître aux mouvements des liquides, en particulier à la sortie d'un ajutage (où la vitesse est v dans la section contractée) et établit la relation entre v^2 et H , hauteur entre le plan d'eau et l'ajutage. Il publie ses découvertes en 1643, mais il faudra attendre un siècle pour que le facteur $2g$ soit explicitement introduit dans la relation qui porte son nom. C'est en 1643 également qu'il réalise la célèbre expérience qui porte son nom, et dont dérive la découverte du baromètre : des fontainiers de Florence voulaient mettre une pompe aspirante pour élever de l'eau à plus de 32 pieds, mais elle ne fonctionnait pas ; Galilée ne réussit pas à en trouver l'explication et c'est Torricelli qui, utilisant un tube à mercure, met en évidence l'existence de la pression atmosphérique. Initiateur des recherches en hydrodynamique, il formule en 1644 la loi d'écoulement d'un liquide par un orifice étroit placé à la partie inférieure d'un vase. En mathématiques, il obtient la quadrature de la cycloïde en 1644.



Blaise PASCAL (1623–1662) – Né à Clermont-Ferrand, ses contributions scientifiques se partagent entre mathématiques : calcul infinitésimal, théorie des nombres, invention d'un calculateur arithmétique baptisé «pascaline» et hydraulique. En 1647, Pascal fait circuler un pamphlet à travers l'Europe : «Nouvelles expériences touchant le vide fait dans les tuyaux avec diverses liqueurs» dans lequel il décrit des expériences qu'il réalise sur des syphons, seringues, coudes et tubes de différentes dimensions, variantes des expériences de Torricelli. Il découvre que la cause de l'élévation des liquides n'est pas «l'horreur de la Nature pour le vide», mais la pression atmosphérique, ce qu'il fait vérifier par son beau-frère Perrier dans sa fameuse expérience réalisée sur le Puy de Dôme. Mais le travail majeur de Pascal, publié un an après sa mort, le «Traité des liqueurs» est une présentation rigoureuse de la théorie de l'hydrostatique. Il y développe à la fois l'axiome présenté depuis comme le principe de Pascal, sa «machine à multiplicateur d'effort», complète les travaux d'Archimède, Simon Stevin et Evangelista Torricelli en combinant statique des liquides et des gaz et enfin, fait le lien entre la dynamique des corps rigides et la dynamique des fluides. Plus généralement, ce XVII^e siècle marque un tournant de la mécanique qui, de science métaphysique devient science physique.



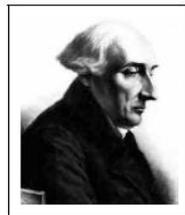
Daniel BERNOULLI (1700–1782) – Mathématicien et physicien né à Groningue (Pays-Bas), mort à Bâle, fils de Jean. Membre de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de Londres et de Berlin et de l'Académie Impériale de Saint-Petersbourg. Il doit à son traité : «Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii» (Hydrodynamique ou mémoire sur les forces et les mouvements des fluides), publié en 1738. On trouve pour la première fois le terme «hydrodynamique» dans cet ouvrage. Il y étudie l'écoulement de l'eau dans les conduites, les rivières et les canaux et il met l'accent sur le principe de conservation de l'énergie. On y trouve également les premiers principes de la théorie cinétique des gaz. Le célèbre «théorème de Bernoulli» n'apparaît sous sa forme actuelle que sous la plume de ses commentateurs, notamment son ami Euler. Il est d'ailleurs impliqué avec ce dernier et D'Alembert dans la querelle des cordes vibrantes.

Jean Le Rond d'ALEMBERT (1717–1783) – Savant et encyclopédiste, sceptique en religion et en métaphysique, défenseur de la tolérance, il expose dans son *Discours préliminaire de l'Encyclopédie* (1751), la philosophie naturelle et l'esprit scientifique qui président à l'œuvre entreprise par Diderot. Ses recherches en physique concerne la mécanique rationnelle et l'hydrodynamique. Il réussit à fonder cette dernière sur les principes de la dynamique, c'est-à-dire à faire une science rationnelle d'un domaine qui était jusqu'alors surtout empirique. D'Alembert rencontra dans son travail le «paradoxe de d'Alembert» selon lequel certains corps pourraient se mouvoir dans un fluide sans rencontrer de résistance.



Leonhard EULER (1707–1783) – Mathématicien suisse né à Bâle, il fut élève à l'université de cette ville de Jean Bernoulli où il lia amitié avec ses fils et notamment Daniel. Il fut le principal artisan de l'essor de l'analyse au XVIII^e siècle, qu'il réorganisa autour du concept de fonction. Il exerça son inventivité dans de nombreux domaines de physique mathématique. Invité par Catherine 1^{re} à l'Académie de Saint-Pétersbourg, il y resta 60 ans comme professeur de physique. Il consacra près de 900 mémoires aux diverses sciences. Il est l'auteur d'un *Traitécomplet de mécanique* –1736– qui est le premier grand

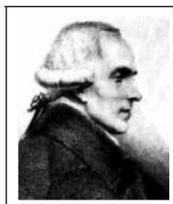
ouvrage où l'analyse soit appliquée à la science du mouvement.



Joseph Louis de LAGRANGE (1736–1813) – Né à Turin, ce mathématicien français démontra plusieurs théorèmes relatifs à la théorie des groupes et se distingue ainsi comme précurseur des travaux de Galois dans ce domaine. Il construisit une «mécanique sans figure», sans référence à la géométrie, dans sa *Mécanique Analytique* de 1788 ; il unifia ainsi les fondements de la discipline, grâce à des méthodes purement analytique. Il développe notamment les travaux d'Euler à qui il succède à Berlin pendant près de vingt ans. Il explore le mouvement des particules fluides, introduit les notions de potentiel des vitesses et de fonction de courant et il est à l'origine de la transformation

conforme que développa Cauchy.

Giovanni Battista VENTURI (1746–1822) – Ce professeur de physique de l'université de Pavie, s'est illustré dans des travaux d'hydraulique. Il a notamment construit une tuyère à cônes divergents qui porte son nom (le *venturi*), il s'est intéressé à l'éjection des liquides par des ajutages, et il a étudié l'étendue des sons audibles.

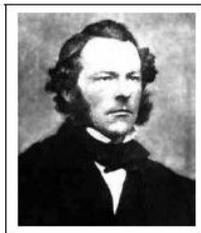


Pierre Simon LAPLACE (1749–1827) – Il est l'auteur de travaux concernant la mécanique céleste (1798–1825), où il réunit en un seul corps de doctrine homogène les travaux de Newton, Halley, Clairaut, d'Alembert, Euler, et d'un remarquable traité sur le calcul des probabilités. Mis à part l'opérateur qui reçut son nom, Laplace se distingua comme hydrodynamicien, par son travail sur les ondes, les marées et les forces capillaires. Il établit la formule de transformation adiabatique d'un gaz et l'utilisa à l'expression de la célérité du son.



Louis Marie Henri NAVIER (1785–1836) – Né à Dijon, après sa sorti de l'École des Ponts et Chaussées, il partage sa vie entre trois activités : l'enseignement de la mécanique à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts, son métier d'ingénieur appliqué à la construction des ponts et l'écriture de nombreux mémoires. Membre de l'Académie des Sciences, il présente en 1822 son «Mémoire sur les lois du mouvement des fluides». Disciple et ami de Fourier, il est l'auteur également de nombreux travaux sur l'élasticité dont il donna une théorie générale en 1821. Son nom est associé à celui de G. G. Stokes dans l'équation fondamentale de la mécanique des fluides.

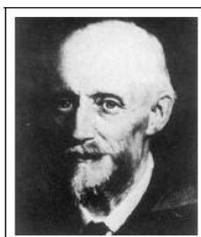
Jean-Louis POISEUILLE (1799–1869) – Ce médecin et physicien français a écrit différents mémoires sur le cœur et la circulation sanguine et à ce titre, il s'est intéressé à l'écoulement du sang dans les vaisseaux, ce qui l'a amené à publier l'article : «Recherche expérimentale sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petit diamètre». Il établit ainsi les lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans le tubes cylindriques de petites dimensions $-0,029 \leq \leq 0,142$ mm -. Expérimentalement, il donne les lois qui portent son nom et qui introduisent le frottement intérieur.



Sir George Gabriel STOKES (1819–1903) – Physicien théoricien né à Skreen en Irlande. Il s'établit en Angleterre après des études à Cambridge. Pratiquement le premier depuis Newton à être à la fois professeur à Cambridge et secrétaire puis président de la Royal Society devant laquelle il présente plus d'une centaine de mémoires. Parmi ceux-ci, celui de 1845 : «On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion , and of the Equilibrium and motion of Elastic Solids » contient ce que nous appelons les «équations de Navier-Stokes». Pour concilier la théorie avec ses expériences, Stokes pensait qu'il y avait un certain glissement du fluide à la paroi. Il

a donné des théories de la fluorescence et de la diffraction lumineuse et étudié la double réfraction ainsi que l'effet de la lumière polarisée sur les plaques photographiques.

Ernst MACH (1838–1916) – Physicien autrichien. Après s'être préoccupé d'acoustique et d'optique, au cours dequelles, il met en évidence le rôle de la vitesse du son en aérodynamique, il publie son ouvrage fondamentale *La mécanique, exposé historique et critique de son développement* dans lequel on trouve une critique des principes de la mécanique newtonienne. Il montre en particulier que l'interaction entre deux masses ne pouvait s'étudier en faisant abstraction du reste de l'Univers, ce qui eut une grande influence sur les travaux d'Einstein. Il soutint que seul existe ce qui peut être exprimé dans les lois expérimentales.



Osborne REYNOLDS (1842–1912) – Cet ingénieur anglais est né à Belfast, et il étudie les mathématiques à Cambridge. Il devient titulaire de la chaire d'«Engineering» (il y en avait seulement deux à l'époque) de ce qui deviendra la Victoria University à Manchester. Ses recherches couvrent la physique et la technologie : mécanique, thermodynamique, électricité d'une part, navigation, frottement de roulement, machines à vapeur d'autre part. En hydraulique, il est le premier à expliquer le phénomène de cavitation, à introduire la viscosité dans un paramètre distinguant les écoulements

laminaires et turbulents (1883). Il est à l'origine de la théorie de la lubrification (1886) et l'équation de base de la tribologie portera son nom. Dans le cadre de cette étude, il est intrigué par l'origine du mécanisme de dissipation d'énergie dans le processus de frottement d'un ski sur la glace. Après avoir constaté que la glace fond lorsqu'elle est soumise à une pression, il calcule l'énergie dissipée par le glissement et montre ainsi que l'élévation de température est suffisante pour provoquer une fusion superficielle de la glace créant ainsi un film d'eau lubrifiant la surface du ski.

Ludwig PRANDTL (1842–1912) – Il a consacré la majeure partie de ses travaux à la mécanique des fluides et l'élasticité. Professeur à l'université de Göttingen en 1904, il participe à la création du laboratoire de recherches aérodynamiques, tout en travaillant à l'institut de mécanique des fluides qui allait devenir l'institut Max Planck, dont il sera nommé directeur en 1947. Il a introduit la notion de couche limite dans l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, et il a étudié le mécanisme des phénomènes de décollement. Il s'est aussi intéressé à la compressibilité des gaz et aux phénomènes de turbulence dans les fluides en écoulement dont il énonce la loi dans la couche limite turbulente. Il a également établi la théorie hydrodynamique de l'aile portante d'envergure infinie dans un fluide parfait.

Nikolaï Iegorovitch JOUKOVSKI (1847–1921) – Cet aérodynamicien russe a construit l'un des premiers tunnels aérodynamiques en 1902. Il exécuta une série de travaux importants en hydraulique, en hydrodynamique et en mécanique. Il a étudié complètement le vol des oiseaux (1891), énoncé la loi qui définit la portance d'une aile d'avion (1906), la détermination des profils d'ailes et des pales d'hélices les plus avantageux (1911), la théorie tourbillonnaire de l'hélice et de nombreux autres travaux.



Theodor von KARMAN (1881–1963) – Cet ingénieur américain d'origine hongroise travailla auprès de Prandtl. Il émigre plus tard aux États-Unis pour prendre la direction du Laboratoire aéronautique Guggenheim à l'Institut de technologie de Californie, qui devient sous son impulsion un lieu important de recherche aéronautique. Il fit construire le premier tunnel aérodynamique supersonique et entama un programme de développement de moteurs à réaction et de fusées. Il a résolu de nombreux problèmes d'aérodynamique, d'hydrodynamique, de thermodynamique. On lui doit d'importantes contributions aux théories du mouvement tourbillonnaire et de la

turbulence dans les écoulements, aux études relatives aux écoulements à grande vitesse, ...