

Les écoulements à très faibles nombre de Reynolds : Écoulements de Stokes

Introduction

Le rapport entre forces d'inertie et de viscosité peut varier d'un écoulement à un autre et, pour un écoulement donné, d'un point à l'autre du champ. La prépondérance relative de l'une ou l'autre de ces force dépend de la valeur globale ou locale du nombre de Reynolds. Dans le cas où ce paramètre est globalement petit, l'écoulement est de type rampant et relève d'un modèle spécifique. Lorsque le comportement visqueux du fluide est de type newtonien, ce modèle correspond à une forme simplifiée linéarisée du modèle de Navier-Stokes, connue sous le nom de modèle de Stokes. Nous allons l'examiner maintenant.

Hypothèses

Par définition, le modèle de Stokes qui régit l'écoulement rampant d'un fluide visqueux newtonien repose sur les deux hypothèses spécifiques suivantes :

1. le milieu est incompressible ;
2. les forces d'inertie sont en tout point et à tout instant négligeables vis-à-vis des forces de viscosité.

La dernière hypothèse s'exprime encore par la relation :

$$Re = \frac{U_o L}{\nu} \ll 1$$

où U_o , est une échelle représentative de la vitesse du mouvement du fluide, L une échelle de longueur et ν la viscosité cinématique du milieu. Avec les hypothèses précédentes, le modèle gouvernant la dynamique de l'écoulement se réduit aux deux équations suivantes :

$$\rho = C^{te} \text{ et } \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = F_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

La dernière équation peut également être reprise sous forme vectorielle équivalente :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(P) + \nu \Delta(\vec{V})$$

L'équation de la dynamique ainsi simplifiée ne fait plus intervenir que quatre échelles de temps caractérisant respectivement l'instantanéité (T_i) ainsi que les forces extérieures de volume (T_F), de pression (T_P) et de viscosité, (T_v). Rapportée à l'échelle de longueur L , cette dernière peut être estimée par :

$$T_v = \frac{L^2}{\nu}$$

L'hypothèse de très petit nombre de Reynolds global ne permet évidemment pas de déduire quoi que ce soit sur les valeurs respectives de ces différentes échelles de temps. C'est pourquoi nous supposons en outre que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $T_i \gg T_v$, de sorte que l'écoulement peut être considéré comme quasi-stationnaire ;
2. $T_P \sim T_F \sim T_v$, ce qui signifie que les trois forces extérieures sont du même ordre de grandeur

REMARQUE - On notera en particulier qu'une conséquence de la deuxième condition ci-dessus est que l'échelle caractéristique de la pression est de l'ordre de $\rho U_o^2 / \text{Re}$.

3. les forces extérieures de volume se réduisent aux seules forces de gravité conduisant à un champ de pression hydrostatique $P_o(r) = \rho g z$ en l'absence de mouvement, conformément à l'équation :

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad}(P_o) = \vec{g}$$

Equations en formulation vitesse-pression

Sous l'ensemble des conditions précédentes (en écoulement newtonien incompressible stationnaire à bas Reynolds), les équations qui régissent le champ de vitesse et de pression deviennent :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{V} &= 0 \\ \text{grad}(P - P_o) &= \mu \Delta \vec{V} \end{aligned}$$

Equations en formulation pression-rotationnel

En usant de l'identité vectorielle pour l'expression du Laplacien vecteur :

$$\Delta(\vec{V}) = \text{grad}(\text{div} \vec{V}) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{V}))$$

on obtient en situation isovolume $\Delta(\vec{V}) = -\text{rot}(\vec{\omega})$

où l'on a introduit le vecteur rotationnel $\vec{\omega} = -\text{rot}(\vec{V})$. L'équation de la dynamique se met ainsi sous la forme de l'**équation de Stokes**, i.e.

$$\text{grad}(P - P_o) = -\mu \text{rot}(\vec{\omega})$$

En prenant la divergence puis le rotationnel membre à membre de l'équation ci-dessus on déduit respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0 \\ \Delta \vec{\omega} &= 0 \end{aligned}$$

La première relation montre que le champ de pression du modèle de Stokes vérifie l'équation de Laplace et non celle de Poisson, comme c'est le cas pour le modèle de Navier-Stokes. Quant à la seconde, elle signifie physiquement qu'il ne peut pas y avoir, en régime permanent, de diffusion visqueuse de rotationnel en écoulement de Stokes. Pour s'en convaincre il suffit de prendre le rotationnel membre à membre de l'équation

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(P) + \nu \Delta(\vec{V})$$

qui montre en effet que :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\omega}$$

Equation de Stokes

Dans les écoulements strictement parallèles le terme $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ est géométriquement nul. Si le nombre de Re est très faible (effets important de la viscosité) le terme inertiel peut de plus être négligé même si l'écoulement n'est pas du tout parallèle.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

C'est en quelque sorte la limite opposée à l'équation d'Euler à nombre de Reynolds élevé.

Nous supposons dans la suite que la seule force volumique est la force de gravité. On peut alors introduire le potentiel $\Phi = \vec{g} \cdot \vec{r}$ (alors $\vec{g} = -\nabla \Phi$). De plus nous supposons que le nombre de Stokes qui compare le terme instationnaire aux termes visqueux est très petit :

$$St = \frac{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|}{\left\| \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} \right\|} = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1$$

Formellement le nombre de Stokes apparaît comme le produit du nombre de Strouhal et du nombre de Reynolds. C'est également le rapport des temps caractéristiques de la diffusion et de l'écoulement. On obtient alors l'équation de Stokes :

$$\vec{\nabla}(p + \rho \Phi) = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

Cette équation est exacte en toute rigueur pour un écoulement stationnaire et si $Re \rightarrow 0$. Une des propriétés des écoulements de Stokes est l'absence d'inertie. Dès que les causes du mouvement disparaissent, l'écoulement s'arrête sans délai. Ces écoulements dissipent extrêmement rapidement leur énergie cinétique.

Il existe d'autres formes équivalentes de l'équation de Stokes :

- Première variante :

$$\vec{\nabla}(p + \rho \Phi) = -\mu r \vec{\text{rot}}(\vec{\omega})$$

En effet $\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\text{div}(\vec{v})) - r \vec{\text{rot}}(r \vec{\text{rot}}(\vec{v}))$, mais $\text{div}(\vec{v}) = 0$ pour un fluide incompressible et la vorticité est définie par $\vec{\omega} = r \vec{\text{rot}}(\vec{v})$.

- Deuxième variante en prenant la divergence de l'équation précédente :

$$\nabla^2(p + \rho \Phi) = 0$$

En effet on a $\nabla^2(p + \rho \Phi) = \text{div}(\vec{\nabla}(p + \rho \Phi))$ et $\text{div}(r \vec{\text{rot}}(\vec{\omega})) = 0$.

La pression satisfait donc à une équation de Laplace à très faible nombre de Reynolds.

- Troisième variante :

$$\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = 0$$

$$\text{En effet } \vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = [\text{div}(r\vec{\omega}t(\vec{v}))] - r\vec{\omega}t(r\vec{\omega}t(\vec{\omega})) = \frac{1}{\mu} r\vec{\omega}t[\vec{\nabla}(p + \rho\Phi)] = 0.$$

Ceci montre qu'à très faible nombre de Reynolds, il n'y a plus transport de la vorticité. La vorticité est dans un état d'équilibre et ne diffuse plus.

L'équation de Stokes étant linéaire il y a unicité de la solution une fois connues les conditions aux limites. De plus on montre que l'écoulement de Stokes est celui qui minimise la dissipation d'énergie (cf E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001, p. 443-452).

Validité des écoulements rampants

En pratique, la validation de la condition de faible nombre de Reynolds du régime rampant peut être réalisée de trois façons élémentairement indépendantes :

1. déplacements à très faible vitesse ;
2. mouvements de très petite échelle ;
3.  coulements de fluides très visqueux.

La première situation est celle des déplacements de géomatériaux. Malgré l'importance des échelles de longueur mises en jeu, la lenteur des déplacements est telle que le nombre de Reynolds global reste très faible. A titre d'exemple de tels mouvements, on peut citer le déplacement des glaciers ou celui de l'écorce terrestre. Les mouvements à échelle "microscopique" est lui représentatif de la deuxième situation. Il peut s'agir d'écoulements internes dans des géométries de taille réduite telles que les canaux et cavités d'un milieu poreux. Il peut s'agir encore du déplacement d'objets de très faibles dimensions tels que bactéries ou suspensions diverses.

Enfin les écoulements de fluides tels que certaines peintures, les huiles, le bitume, le verre fondu ou encore le miel relèvent eux de la dernière situation.

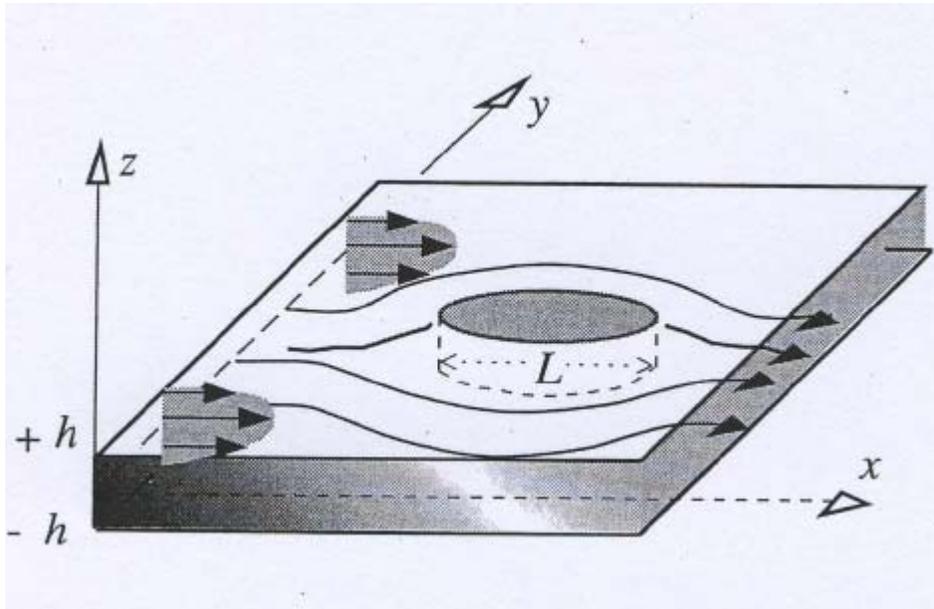
Pour autant, il ne faudrait pas conclure que le modèle de Stokes, s'applique à l'intégralité de ces situations car la plupart d'entre elles ne concerne pas des fluides à comportement newtonien.

Compléments - Ordres de grandeurs de configurations pratiques.

- En tectonique, la vitesse de déplacement des plaques est de l'ordre de quelques centimètres par an, soit pour une amplitude de 30 cm, une vitesse d'environ 10^{-8} m/s. Avec une viscosité $\nu \approx 10^{20} m^2 / s$ cela conduit à un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^{-23} pour une échelle de longueur de 100 km.
- Pour un objet dont la taille est de l'ordre d'un micromètre est qui se déplace dans de l'eau ($\nu \approx 10^{-6} m^2 / s$)   une vitesse de 10 $\mu\text{m/s}$, le nombre de Reynolds correspondant est de l'ordre de 10^{-5} .
- Enfin, pour du verre fondu ($\nu \approx 10^{-2} m^2 / s$) soufflé par un orifice de 1 cm de diamètre à une vitesse de 1 cm/s, le nombre de Reynolds est de l'ordre de 10^{-2} .

Ecoulement rampant de Hele-Shaw

En écoulement de Hele Shaw (1898), un fluide très visqueux se déplace à faible vitesse Ua entre deux plans parallèles distants d'une faible épaisseur ($2h$). Si l'on dispose transversalement un obstacle de dimension caractéristique, nous allons voir que sous l'hypothèse de régime rampant, cette configuration permet de simuler, à distance de l'obstacle, le champ de l'écoulement à potentiel de fluide parfait incompressible autour de celui-ci.



On pose : $\varepsilon = \frac{h}{L}$ et $Re = U_a L / \nu$

On néglige les forces de gravité (pesanteur), et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :
 $\varepsilon \ll 1$ et $Re \ll 1$

On désigne par U, V, W, p les composantes de la vitesse et la pression en tout point (x, y, z) de l'écoulement dans la cellule.

1) si l'ordre de grandeur de U et V est de l'ordre U_a ($U \sim V \sim U_a$), alors $W \sim \varepsilon U_a$;

En effet U_a est une vitesse de référence du déplacement du fluide dans un plan (x, y) . si l'on désigne par U'_a la vitesse de référence du mouvement suivant l'axe z , l'estimation des ordres de grandeurs des termes de l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

$$\frac{U_a}{L} + \frac{U_a}{L} + \frac{U'_a}{\varepsilon L} = 0, \quad \frac{U_a}{L} + \frac{U_a}{L} + \frac{U'_a}{\varepsilon L} = 0$$

car l'ordre de grandeur de la longueur suivant x ou y est de L , de h selon z et $\varepsilon = \frac{h}{L}$.

On en déduit que : $U'_a = \varepsilon U_a$, les termes $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ étant du même ordre de grandeur que $\frac{\partial W}{\partial z}$.

On peut répéter cette analyse dimensionnelle pour les équations de Navier-Stokes (en particulier les termes d'inertie et de viscosité), il vient en projection sur x, y et z :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a' U_a}{h} \quad \nu \left(\frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{h^2} \right)$$

$$\frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a^2}{L} \quad \nu \left(\frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{\varepsilon^2 L^2} \right)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a' U_a}{h} \quad \nu \left(\frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{h^2} \right)$$

$$\frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a^2}{L} \quad \frac{U_a^2}{L} \quad \nu \left(\frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{\varepsilon^2 L^2} \right)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{U_a U_a'}{L} \quad \frac{U_a U_a'}{L} \quad \frac{U_a' U_a'}{h} \quad \nu \left(\frac{U_a'}{L^2} \quad \frac{U_a'}{L^2} \quad \frac{U_a'}{h^2} \right)$$

$$\varepsilon \frac{U_a^2}{L} \quad \varepsilon \frac{U_a^2}{L} \quad \varepsilon \frac{U_a^2}{L} \quad \nu \left(\frac{\varepsilon U_a}{L^2} \quad \frac{\varepsilon U_a}{L^2} \quad \frac{U_a}{\varepsilon L^2} \right)$$

Il en découle par comparaison des ordres de grandeurs des divers termes que :

- les contributions du Laplacien sont telles que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- les termes d'inertie et de viscosité vérifient :

•

$$[Inertie] \approx \varepsilon^2 \cdot \text{Re} \cdot [Viscosité]$$

- les termes de viscosité vérifient :

$$[Viscosité]_x \approx [Viscosité]_y \quad \text{et} \quad [Viscosité]_x \approx \varepsilon^2 \cdot [Viscosité]_z$$

Ainsi, en ne retenant que les termes d'ordre supérieurs, les gradients de pression sont équilibrés par les forces de viscosité en z :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

La pression est donc indépendante de z , et $P(x,y,z) = P(x,y)$.
L'intégration de la première équation par rapport à z donne :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{z^2}{2} + \alpha \cdot z + \beta \right) \frac{\partial P}{\partial x}$$

De même :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{z^2}{2} + \alpha' \cdot z + \beta' \right) \frac{\partial P}{\partial y}$$

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions d'adhérence sur les plans $z = \pm h$ où

$$U(x, y, \pm h) = 0, V(x, y, \pm h) = 0$$

$$\text{Soit : } U(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \cdot (z^2 - h^2) \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{et} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \cdot (z^2 - h^2) \frac{\partial P}{\partial y}$$

Dans le plan médian $z = 0$:

$$U(x, y, 0) = U_o(x, y) = -\frac{h^2}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{et} \quad V(x, y, 0) = V_o(x, y) = \frac{h^2}{2\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}$$

et ce vecteur vitesse médian $\vec{V}_o(x, y)$ vérifie les 2 équations :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{V}_o(x, y) = 0 \\ \vec{V}_o(x, y) = -\frac{h^2}{2} \text{grad}[P(x, y)] \end{cases}$$

La seconde relation traduit le caractère irrotationnel de ce champ de vitesse, car $\text{rot}(\text{grad}()) = 0$, comme l'est celui de fluide à potentiel. A l'exclusion du voisinage immédiat de la paroi de l'obstacle où la condition d'adhérence agit, les lignes de courant en cellule Hele-Shaw ($\text{Re} \sim 0$) fournissent donc une analogie du champ de l'écoulement à potentiel de fluide parfait ($\text{Re} \rightarrow \infty$).

Écoulement autour d'une sphère : force de Stokes

Nous allons montrer, dans la limite des nombres de Reynolds tendant vers 0, que la force de traînée visqueuse exercée sur une sphère de rayon R par un fluide s'écoulant à la vitesse \vec{U} s'écrit :

$$\vec{F}_{St} = 6\pi\mu R\vec{U}$$

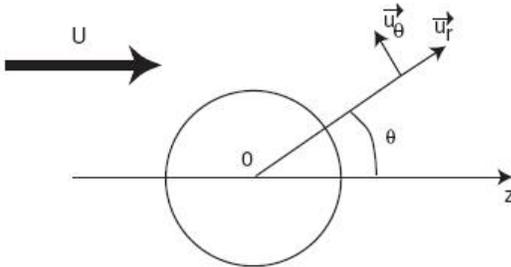
C'est ce que l'on appelle la force de Stokes (1851).

Démonstration

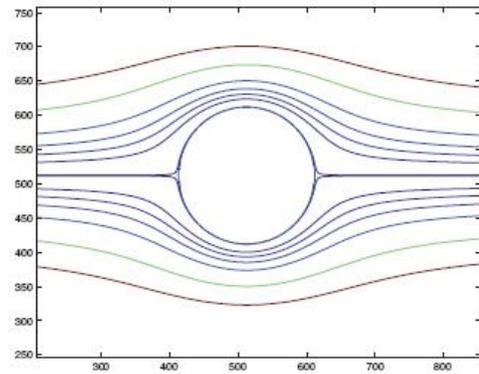
Les hypothèses sont $Re \ll 1$ et écoulement stationnaire $St \ll 1$. Nous pouvons alors utiliser l'équation de Stokes :

$$\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \mu\vec{\nabla}^2\vec{v}$$

Nous allons travailler en coordonnées sphériques avec une sphère immobile dans un écoulement homogène de vitesse à l'infini U, dirigé selon Oz (figure ci-dessous). Nous supposons un écoulement axisymétrique autour de Oz (nous aurons alors $\partial/\partial\varphi = 0$) et que $u_\varphi = 0$.



Coordonnées sphériques autour d'une sphère. L'écoulement est selon Oz.



Lignes de courant autour d'une sphère au repos.

L'écoulement est alors 2C2D stationnaire et s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{u}(r, \theta) = u_r(r, \theta)\vec{e}_r + u_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta$$

Les conditions aux limites sont :

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ en } r = R$$

$$\vec{u} = U\vec{z} \text{ en } r \rightarrow \infty$$

soit $u_r = u_\theta = 0 \text{ en } r = R$

$$u_r = U \cos \theta \text{ et } u_\theta = -U \sin \theta \text{ en } r \rightarrow \infty$$

On introduit la fonction de Stokes en coordonnées sphériques (écoulement axisymétrique); dans le cas d'un écoulement incompressible 2C2D axisymétrique (sans composante orthoradiale), on doit utiliser une autre définition de la fonction de courant, la *fonction de Stokes*.

– En coordonnées sphériques : $\vec{u} = (u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), 0)$ et l'on peut écrire :

$$\vec{u} = r\vec{\theta}t \left(\frac{\Psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \right) \vec{e}_\phi$$

on peut résoudre le problème et l'on trouve

$$\Psi(r, \theta) = U \sin^2 \theta \left(\frac{L}{r} + Mr^2 + C \frac{r}{2} \right)$$

avec L, M et C trois constantes à déterminer pour satisfaire les conditions aux limites. On trouve alors

$$\Psi = -\frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right)$$

On trouve finalement le champ de vitesse partout autour de la sphère.

cf.

D.J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford, 1990, p. 223 ;

E. Guyon J.-P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001, p. 465 ;

P. Chassaing. *Mécanique des fluides*, Cepadue, 1997, pp ; 333- :

$$\begin{cases} p(r, \theta) = P_o - \frac{3\mu UR}{2r^2} \cos \theta \\ u_r(r, \theta) = U \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ u_\theta(r, \theta) = -U \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{cases}$$

Ces équations montrent que le champ de vitesse décroît très doucement à grande distance (en $1/r$). Ce qui fait que l'écoulement est très influencé par des parois même lointaines ou d'autres particules en mouvement (cas de la sédimentation de particules).

A partir du champ de vitesse nous pouvons maintenant calculer les composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$ en coordonnées sphériques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\theta\theta} = 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\phi\phi} = 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} = \eta \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi r} = \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \right) \end{array} \right.$$

Le fluide étant incompressible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. De plus sur la sphère, par adhérence, $u_r = u_\theta = u_\phi = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0.$$

On peut ensuite calculer la composante selon l'axe Oz de la contrainte :

$$\sigma_z = ([\sigma] \vec{n}) = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta$$

et l'on trouve : $\sigma_z = \frac{3\mu U}{2R}$ en tout point de la sphère (quelque soit θ).

Et donc $\vec{F}_z = \oiint \sigma_z dS = \sigma_z \cdot 4\pi R^2 = 6\pi\mu R U$. C'est la force de Stokes exercée par un fluide visqueux sur une sphère.

En exercice, on pourra vérifier que la force transverse (portance) est bien nulle comme l'impose ici la symétrie de l'écoulement. Ou montrer que pour une bulle sphérique (surface libre) : $F_z = 4\pi\mu R U$.

Détails

En raison du caractère bidimensionnel du mouvement, le vecteur rotationnel se réduit à sa seule composante suivant le vecteur directeur \vec{e}_ϕ , et nous poserons :

$$\vec{\omega} \equiv r\vec{\otimes}t\vec{V} = \omega(r, \theta)\vec{e}_\phi$$

Tout le problème se réduit alors à la détermination de la fonction $\omega(r, \theta)$ avec pour condition à la limite $\omega(r \rightarrow \infty, \theta) = 0$

Calcul du rotationnel

Le champ de rotationnel s'obtient par résolution de l'équation de Laplace : $\Delta \vec{\omega} = \vec{0}$. Par définition même du vecteur rotationnel, on a identiquement $\Delta \vec{\omega} = r\vec{\otimes}t(r\vec{\otimes}t\vec{\omega})$, de sorte que l'équation à résoudre s'écrit également :

$$r\vec{\otimes}t(r\vec{\otimes}t\vec{\omega}) = \vec{0}$$

Or, en coordonnées sphériques les composantes du rotationnel d'un vecteur $\vec{A}(A_r, A_\theta, A_\phi)$ s'expriment par :

$$\vec{e}_r : \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\vec{e}_\theta : \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(A_r)}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right]$$

$$\vec{e}_\phi : \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Appliquant ces relations au vecteur $\vec{\omega} = \omega(r, \theta) \vec{e}_\phi = \omega \vec{e}_\phi$ on obtient :

$$r\vec{\otimes}t\vec{\omega} : \begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\omega \sin \theta)}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\omega) \\ 0 \end{cases} \quad r\vec{\otimes}t(r\vec{\otimes}t\vec{\omega}) : \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2(r\omega)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\omega \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

Finalement l'équation à résoudre pour la fonction scalaire $\omega(r, \theta)$ s'écrit :

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\omega) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega \sin \theta) \right] = 0$$

La solution de cette équation est recherchée par séparation des variables sous la forme $\omega(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$ où les fonctions $f(r)$ et $g(\theta)$ dépendent séparément des variables r et θ respectivement. Par simple substitution dans l'équation pour $\omega(r, \theta)$, on déduit que ces fonctions doivent satisfaire les équations différentielles suivantes :

$$\frac{r}{f(r)} \frac{d^2}{dr^2} [rf] = \frac{r}{f(r)} [rf]'' = C^{te} = \alpha$$

$$\frac{1}{g} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d(g \sin \theta) / d\theta}{\sin \theta} \right] = -\alpha$$

On peut alors aisément vérifier que $g(\theta) = \sin \theta$ est solution de la seconde équation avec $\alpha = 2$. L'équation résultante pour la fonction $f(r)$ devient alors :

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0$$

et la solution générale de cette équation différentielle est $f(r) = \frac{A}{r^2} + Br$ où A et B sont des constantes d'intégration. Tenant compte de la condition limite sur $r \rightarrow \infty$, la constante B est nécessairement nulle. On aboutit alors à la solution pour le rotationnel :

$$\omega(r, \theta) = A \frac{\sin \theta}{r^2}$$

Calcul de la fonction courant

La fonction courant d'un écoulement axisymétrique en coordonnées sphériques est définie par :

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Par substitution de ces expressions dans la définition de la composante ω_θ , on obtient facilement l'équation gouvernant la fonction courant :

$$\omega_\theta \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = A \frac{\sin \theta}{r^2}$$

Cherchant comme précédemment une solution sous la forme $\Psi(r, \theta) = F(r).G(\theta)$, il vient après substitution :

$$r \frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{F(r)}{r} \frac{\sin \theta}{G(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{dG(\theta)/d\theta}{\sin \theta} \right] = -A \frac{\sin^2 \theta}{G(\theta)}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre pour la fonction F(r), dont les coefficients sont soit constants, soit des fonctions de l'argument θ . Pour qu'une telle équation admette une solution, l'indépendance des variables r et θ impose que ces coefficients soient proportionnels, ce qui fournit deux conditions sur la fonction G(θ) :

$$\frac{\sin \theta}{G(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{dG(\theta)/d\theta}{\sin \theta} \right] = C_1^{te} \quad \text{et} \quad A \frac{\sin^2 \theta}{G(\theta)} = C_2^{te}$$

Ces deux conditions sont compatibles, puisque, posant par exemple $G(\theta) = \sin^2 \theta$, on a alors :

$$C_1^{te} = -2 \quad \text{et} \quad C_2^{te} = A$$

L'équation résolvante pour la fonction F(r) devient ainsi : $r \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{2}{r} F = -A$

Une intégrale particulière de l'équation complète est $Ar/2$, et l'intégrale générale de l'équation sans second membre vaut $Pr^2 + Q/r$ où P et Q sont deux constantes. En regroupant les résultats, on obtient alors :

$$\Psi(r, \theta) = \left(\frac{A}{2}r + P.r^2 + \frac{Q}{r} \right) \sin^2 \theta$$

Calcul du champ de vitesse

Par application de la définition de la fonction de courant, on obtient :

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{2}{r^2} \left(\frac{A}{2}r + P.r^2 + \frac{Q}{r} \right) \cos \theta$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{A}{2}r + 2P.r^2 - \frac{Q}{r} \right) \sin \theta$$

Ces relations permettent alors de fixer les valeurs des constantes A, P, Q à partir des conditions aux limites, avec:

1. pour l'écoulement autour d'une sphère fixe:

$$\|\vec{V}\| \rightarrow 0 \text{ pour } r \rightarrow \infty, \text{ et } u_r(r = R, \theta) = u_\theta(r = R, \theta) = 0$$

2. pour le déplacement d'une sphère dans un fluide au repos:

$$\|\vec{V}\| \rightarrow V_0 \text{ pour } r \rightarrow \infty, u_r(r = R, 0) = U \text{ et } u_\theta(r = R, \pi/2) = -U$$

On obtient ainsi respectivement :

$$\text{Cas (1) : } A = -\frac{3}{2}RU, P = \frac{U}{2} \text{ et } Q = R^3 \frac{U}{4}$$

$$\text{Cas (2) : } A = -\frac{3}{2}RU, P = 0 \text{ et } Q = -R^3 \frac{U}{4}$$

Le champ de vitesse est alors pour une sphère fixe (cas 1) :

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ u_\theta(r, \theta) = -U \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{cases}$$

et la fonction de courant est alors de : $\Psi(r, \theta) = \left(-\frac{3}{4}Rr + \frac{1}{2}.r^2 + \frac{R^3}{4r} \right) U \sin^2 \theta$

Calcul du champ de pression

En supposant le fluide non pesant, la pression se déduit par intégration de l'équation de Stokes du champ de vitesse :

Equation de Stokes : $\text{grad}(P) = \mu \Delta \vec{V}$

En écoulement isovolume/incompressible, on a $\Delta \vec{V} = -r\vec{ot}(r\vec{ot}\vec{V}) \equiv -rot(\vec{\omega})$, de sorte que l'équation pour la pression s'écrit :

$$gr\vec{a}d(P) = -\mu r\vec{o}t(\vec{\omega})$$

Introduisant le champ du rotationnel calculé ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \equiv -\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(\omega \sin \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial(A \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \theta)}{\partial \theta} = -2A \frac{\cos \theta}{r^3} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{r \partial \theta} \equiv +\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\omega) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rA \frac{\sin \theta}{r^2}) = -A \frac{\sin \theta}{r^3} \\ \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \end{array} \right.$$

Par intégration de la première équation par rapport à r , on obtient : $\frac{P}{\mu} = A \frac{\cos \theta}{r^2} + h(\theta)$

qui par substitution dans la seconde équation donne : $-A \frac{\sin \theta}{r^3} + \frac{dh/d\theta}{r} = -A \frac{\sin \theta}{r^3}$, soit $dh/d\theta = C^{te}$.

La solution s'écrit finalement : $P = P_o + \mu A \frac{\cos \theta}{r^2} = P_o - \mu \frac{3UR \cos \theta}{2r^2}$ pour une sphère fixe.

Efforts exercés sur la sphère

Les résultats précédents montrent que l'écoulement d'un fluide à vitesse U autour d'une sphère fixe exerce sur cet obstacle des efforts de pression et de viscosité. Les contraintes visqueuses s'obtiennent directement à partir de la loi de Newton avec le champ de vitesse précédemment calculé. On peut ainsi vérifier que toutes les composantes du tenseur sont nulles à l'exception de la contrainte de cisaillement $\tau_{\theta r}$ qui vaut :

$$\begin{aligned} \tau_{\theta r}(r, \theta) &= \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \\ &= -\frac{U\mu \sin \theta}{r} \left(1 - \frac{3R}{4r} + \frac{5R^3}{4r^3} \right) \\ \tau_{\theta r}(r = R, \theta) &= -\frac{3U\mu \sin \theta}{2R} \end{aligned}$$

En tout point sur la sphère, les forces de pression et de viscosité s'expriment donc par :

$$\begin{aligned} d\vec{F}^P &= -P(r = R, \theta) ds \cdot \vec{n} \\ d\vec{F}^V &= -\tau_{\theta r}(r, \theta) ds \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

avec $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$

En projection sur l'axe Oz et en remplaçant les fonctions par leurs valeurs, pour $\phi = 0$ à 2π , on obtient :

$$d\bar{F}^P = -\left(P_o - \mu \frac{3U \cos \theta}{2R}\right) \cos \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

$$d\bar{F}_z^V = \left(\mu \frac{3U}{2R}\right) \sin \theta \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

où une première intégration en ϕ (entre 0 et 2π) a été effectuée sur l'élément d'aire, compte tenu de la symétrie de révolution. Par simple intégration de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, on obtient alors :

$$F_z^P = 2\pi\mu UR \quad \text{et} \quad F_z^V = 4\pi\mu UR$$

Le total des deux forces représentant la traînée totale $D = 6\pi\mu UR$

$$\text{On a : } D = -\int_0^\pi [\tau_{r\theta}(R, \theta) \sin \theta + P(R, \theta)] 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

1) La première relation $F_z^P = 2\pi\mu UR$ montre que la traînée de pression n'est pas nulle et contribue au tiers du montant total de la résistance D de la sphère. En effet, bien que les lignes de courant présentent une symétrie "amont-aval", le champ de pression n'est pas lui symétrique de part et d'autre du maître couple de la sphère, comme le montre son expression en changeant θ en $\pi - \theta$. Il n'existe donc pas de paradoxe de d'Alembert pour cet écoulement, contrairement à la configuration homologue en fluide parfait.

2) La relation précédente est connue sous le nom de "formule de Stokes". Sa vérification expérimentale a montré que sa plage de validité s'étendait au delà de la clause d'établissement théorique ($Re \ll 1$) puisqu'elle s'applique en fait jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité.

3) En définissant le coefficient de traînée de la sphère par :

$$C_D = \frac{|D|}{\frac{1}{2} \rho S U^2}$$

on trouve, en adoptant pour surface de référence celle du maître couple ($S = \pi R^2$) :

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement rapporté au diamètre de la sphère.

4) Cette relation ne concerne qu'une sphère isolée en mouvement dans un fluide infini. Elle ne peut être appliquée sans précautions à un ensemble de particules. En effet, la perturbation induite par un la présence, dans un écoulement rampant, d'un obstacle fixe se fait sentir à grande distance de celui-ci. On peut facilement vérifier, en utilisant par exemple les résultats du tableau 10.1, que le déplacement d'une sphère dans un fluide au repos à l'infini modifie le champ de vitesse d'une valeur qui est encore égale à 10 % de celle de la sphère à une distance de son centre de l'ordre de 7,5 fois le rayon.

La vitesse relative d'une seconde sphère placée à cette distance de la première est donc réduite. La présence de telles interactions à longue distance en régime de Stokes joue ainsi un rôle déterminant dans la dynamique des suspensions et laisse pressentir des comportements très différents en matière de sédimentation par exemple, selon le degré de dilution de la solution. On trouvera dans le livre de Guyon, Hulin & Petit des compléments forts intéressants de cet aspect du mouvement diphasique.

