

## Énoncé du DS commun de physique n°4 - Mécanique des fluides

# 1 Écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère

On considère un fluide newtonien visqueux de viscosité  $\eta$ , incompressible et de masse volumique  $\mu$ .

Données numériques :

Accélération de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Masse volumique de l'air :  $\mu = 1,29 \text{ kg.m}^{-3}$

Viscosité de l'air :  $\eta = 1,8.10^{-2} \text{ P1}$

Masse volumique de l'huile de ricin :  $\mu' = 965 \text{ kg.m}^{-3}$

Viscosité de l'huile de ricin :  $\eta' = 1,00 \text{ P1}$

Masse volumique du verre :  $\rho = 2,50.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Formulaire :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v})) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{v}) - \Delta \vec{v}$$

$$\text{En coordonnées sphériques : } \text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \text{ et } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

## 1.1 Préliminaires

1. On s'intéresse, dans ce fluide, à un écoulement unidirectionnel de la forme  $\vec{v} = v(y, t) \vec{e}_x$ ; donner l'expression de la force de viscosité exercée par la particule de fluide  $P_1$  sur la particule de fluide  $P_2$  (figure 1), leur surface de contact étant notée  $S$ .

2. En déduire que l'on peut définir une force volumique de cisaillement, dont on donnera l'expression dans le cas du champ de vitesse considéré ici. On admettra par la suite que cette force volumique se généralise à tout écoulement incompressible sous la forme  $\eta \vec{\Delta} \vec{v}$ .

3. En l'absence de force volumique extérieure, établir l'équation locale de la dynamique du fluide.

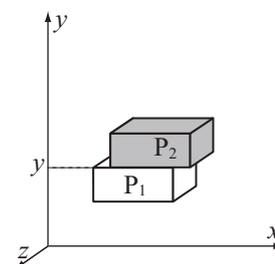


FIGURE 1 – Contact entre deux particules de fluide

## 1.2 Écoulement autour d'une sphère

On s'intéresse maintenant à l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère de rayon  $R$  en l'absence de toute force extérieure. On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  d'axe  $Oz$  (définitions figure 2),  $O$  étant le centre de la sphère. On se place dans le référentiel de la sphère et on suppose que, loin de la sphère, l'écoulement du fluide est uniforme, de vitesse  $\vec{v} = V_0 \vec{e}_z$  et de pression  $P_0$ .

4. Bâtir, à partir des grandeurs caractéristiques du fluide  $\mu$ ,  $\eta$  et  $V_0$ , une grandeur  $D_0$  homogène à une distance.

5. Exprimer le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement étudié en fonction de  $D = 2R$  (considérée comme la distance caractéristique de l'écoulement) et de  $D_0$ .

6. Le fluide considéré est de l'air de vitesse  $V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ . Calculer le nombre de Reynolds pour une sphère de rayon  $R = 0,5 \text{ cm}$ , puis pour une sphère de rayon  $0,5 \mu\text{m}$ . Comment

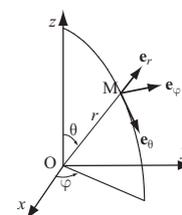


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques et base locale

peut-on qualifier l'écoulement dans les deux cas ? Dessiner sommairement l'allure des lignes de courant correspondantes.

7. Justifier que la force résultante  $\vec{F}$ , appelée force de traînée, correspondant aux actions sur la sphère du fluide en mouvement, est de la forme  $\vec{F} = F\vec{e}_z$ .

8. Justifier que le coefficient de traînée de la sphère, dont l'expression est donnée ci-dessous, ne dépend que du nombre de Reynolds pour un fluide fixé :

$$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 \pi R^2}.$$

9. Commenter la courbe (Annexe 1 en fin de sujet, à rendre avec la copie) donnant l'évolution du coefficient de traînée  $C_x$  pour une sphère en fonction du nombre de Reynolds. Placer en particulier les points correspondant aux applications numériques de la question 6 si cela est possible.

10. Dans le cas d'une chute libre d'une sphère de rayon  $R = 0,5$  cm, quelle expression approximative de la force de frottement de l'air peut-on utiliser ?

### 1.3 Établissement de la formule de Stokes

Toujours dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère, avec les notations de la partie précédente, on se place maintenant en régime permanent et on suppose la vitesse suffisamment faible pour négliger l'accélération convective.

11. Quelles sont alors les conditions imposées sur le champ des vitesses par :

- l'incompressibilité de l'écoulement,
- la présence de la sphère,
- la forme du champ dans les régions éloignées de la sphère,
- l'équation locale de la dynamique.

On donne le champ des vitesses suivant :

$$\vec{v} = V_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{e}_r - V_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \vec{e}_\theta$$

et le résultat :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v})) = -\frac{3V_0 R}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

12. Vérifier que ce champ satisfait les conditions a) à c) de la question 11.

13. L'écoulement est-il rotationnel ? irrotationnel ? laminaire ? turbulent ? potentiel ? stationnaire ?

14. En utilisant l'équation locale de la dynamique linéarisée, déterminer le champ de pression en tout point de l'écoulement.

15. Calculer la résultante des forces de pression sur la sphère.

16. On admet que la force de cisaillement exercée par le fluide sur un élément de surface de la sphère est donnée par :

$$\overrightarrow{dF_{cis}} = -\frac{3\eta V_0 R \sin^2 \theta}{2} d\theta d\varphi \vec{e}_\theta.$$

Justifier cette expression par comparaison à l'étude de la question 1 et calculer la résultante des forces de cisaillement exercées sur la sphère.

17. En déduire que la force de traînée exercée sur la sphère est donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{F} = 6\pi\eta RV_0\vec{e}_z$$

et que ce résultat est compatible avec la courbe de l'annexe 1 donnant le coefficient de traînée.

**18. Application :** on observe la chute libre dans l'huile de ricin d'une bille de verre de rayon  $R$ ; déterminer la condition sur  $R$  pour laquelle l'expérience permet de mesurer la viscosité de l'huile et proposer un protocole.

## 2 Approche documentaire

### 2.1 L'hydrolien fluvial, un nouveau gisement d'électricité, extrait du site EDF Pulse, novembre 2015

Sur la Loire, à Orléans, l'hydrolienne Hydroquest River est installée depuis un an et récemment raccordée officiellement au réseau électrique. L'heure est au premier bilan pour cette source d'énergie renouvelable "régulière et prédictible". Et il est positif... D'autres projets existent en France et aussi - et surtout- dans des pays en développement, comme nous l'explique Jean-François Simon, le président de l'entreprise qui a mis au point ce système.



FIGURE 3 – L'hydrolienne d'Orléans, avec sa mécanique relevée au-dessus de la barge. On remarque les déflecteurs chargés d'écartier les gros débris charriés par le fleuve. © Hydroquest

#### Le courant d'un fleuve est-il une bonne énergie ?

Jean-François Simon : il y a beaucoup d'avantages. C'est une énergie renouvelable, mais hautement prédictible. Il y a toujours du courant. C'est la plus régulière de toutes. Or, la puissance varie avec le cube de la vitesse. Une unité Hydroquest River 1.40 produit 40 kW en puissance nominale, et 80 kW pour le modèle 2.80, avec deux étages de turbines. Il faut donc toujours installer des parcs d'hydroliennes, comme pour l'éolien ou le solaire.

#### Pourquoi l'hydrolien fluvial n'a-t-il pas été inventé plus tôt ?

Ce n'est pas si facile ! Nous n'en sommes qu'au début... Pour qu'une hydrolienne fluviale soit exploitable, il faut faire une machine qui résiste aux débris (il y en a beaucoup dans les fleuves!), qui soit facile à entretenir (ce serait très difficile pour des plongeurs d'intervenir sous l'eau en cas de panne ou pour la maintenance) et qui soit utilisable en parc.

Nos hydroliennes utilisent deux axes rotatifs verticaux, ce qui est une solution nouvelle car jusqu'ici les modèles existants sont à axe horizontal, comme des éoliennes. Il a fallu mettre au point une grille de déviation efficace contre tout ce que charrie un fleuve. Pour la maintenance, nous avons choisi un équipement porté par une barge flottante. Tout le système se relève en pivotant et on peut intervenir à sec. Des outils de télégestion, avec un tableau de commande et des caméras, permettent de surveiller l'installation depuis un ordinateur. Les turbines peuvent même être ainsi relevées à distance.

Tout cela fonctionne correctement aujourd'hui. Nous en sommes aux premières machines commercialisables. J'oserai dire que nous sommes les plus avancés au monde pour l'hydrolien fluvial.

#### L'hydrolienne d'Orléans : elle flotte

Baptisée Hydroquest River 1.40 car elle embarque un étage de deux turbines et génère 40 kW dans un courant de 3,1 m/s, l'hydrolienne d'Orléans mesure environ dix mètres de longueur. Avec une profondeur

requis de 2,2 m, elle convient à des rivières de faible profondeur. Première à être raccordée au réseau électrique français, elle est avant tout un démonstrateur pour tester et confirmer la viabilité de la machine et la montrer à de futurs clients. Elle est là en situation réelle, à ceci près qu'une installation opérationnelle en compterait plusieurs dizaines, voire plus. L'idée était de tester sa résistance au milieu naturel ainsi que son " acceptabilité " et son impact environnemental dans ce site urbain et classé Natura 2000. Outre l'entreprise grenobloise Hydroquest, le projet, d'un montant global de 2,46 millions d'euros sur 3 ans, associe entre autres, EDF et la ville d'Orléans pour le déploiement en Loire.

La machine existe en version à deux étages (Hydroquest River 2.80, donc, pour 80 kW) et l'entreprise grenobloise étudie aussi des hydroliennes marines et estuariennes avec le même principe d'étages de deux roues à axes verticaux. Un des avantages de ces machines, dans le cas de l'océan, est que le renversement du courant de marée ne nécessite pas obligatoirement de rotation de la machine. L'échelle n'est plus la même avec des mécanismes qui atteindraient 20 m de hauteur et une masse de plusieurs centaines de tonnes.

### Quel est l'impact de telles installations ?

Avec ces petites unités, l'impact environnemental est très limité. C'est ce que nous prouvons avec notre démonstrateur installé à Orléans, sur la Loire, en pleine zone Natura 2000... . Nous avons étudié l'effet sur les poissons qui traverseraient les turbines : ils ressortent sans être affectés. La barge est ancrée au fond par des pieux de faible taille. Il n'y a aucun génie civil. Les équipements sont recyclables. D'autre part, tout est conteneurisable. J'ai vécu en Afrique et je connais bien les impératifs pour ces pays... .

### Quelle est l'ampleur de ce " gisement " ?

En France, il y a plusieurs sites possibles et nous avons des projets. Mais l'essentiel de notre développement se fera en Afrique, en Amérique latine et en Asie. Il y a des possibilités d'installations de 3 à 4 MW qui viendraient remplacer des groupes électrogènes Diesel. Pour l'hydrolien estuarien, les installations peuvent être plus grandes, de l'ordre de 100 à 200 kW par unité. L'hydrolien marin, comme par exemple ce qui se prépare à Paimpol-Bréhat, et qui exploite les courants de marée, se situe au-dessus en puissance, avec des unités à 1 à 2 MW, qui pèsent des centaines de tonnes. Mais il faut des marées fortes et il y a une quinzaine de grands sites dans le monde.

## 2.2 Questions

### 2.2.1 Ordres de grandeur

**19.** La consommation électrique d'un foyer français est à l'heure actuelle d'environ 6000 kWh par an. Combien de foyers peuvent être alimentés à Orléans grâce à l'hydrolienne Hydroquest River 1.40 ? Conclure éventuellement en vous aidant du texte.

**20.** Le texte annonce une " puissance (qui) varie avec le cube de la vitesse "  $v_1$  du courant. Proposer une expression pour cette puissance  $P$  en introduisant un ou plusieurs paramètres pertinents ; à partir d'une référence au texte, définir précisément ce que représente  $P$ .

**21.** À partir de l'expression précédente, estimer  $P$  pour l'hydrolienne d'Orléans à la vitesse nominale donnée dans le texte, en admettant que la section que traverse l'eau qui alimente les turbines est équivalente à un disque de rayon  $R = 1,5$  m. Comparer à la puissance annoncée dans le texte et commenter.

**22.** Une étude théorique simple, qui sera menée dans une seconde partie, permet d'établir que la puissance prélevée par la turbine au courant ne peut pas dépasser 59 % de la puissance disponible. Dédurre de l'estimation de  $P$  la puissance prélevée par l'hydrolienne et comparer à la puissance annoncée dans le texte.

**23.** Que vaudrait  $P$  pour une éolienne de même section balayée et dans un écoulement de même vitesse ? Quel est alors l'intérêt de l'hydrolienne par rapport à l'éolienne ?

**24.** Renseignement pris, on apprend que la vitesse du courant de la Loire à Orléans est de 2 m/s pour une profondeur d'environ 4 mètres. Quelle est donc finalement la puissance que produit probablement l'hydrolienne d'Orléans ? Justifier votre réponse.

**25.** Compte-tenu des ordres de grandeur disponibles, que peut-on dire de la nature de l'écoulement d'eau ?

### 2.3 Modélisation simple et limite de Betz

On cherche à faire un modèle simple pour expliquer la limite en puissance évoquée à la question **22**. Les notations sont définies en figure 4. On modélise l'écoulement d'eau (de masse volumique  $\mu$ ) à partir d'un tube de courant qui s'appuie sur la surface  $S = \pi R^2$  balayée par le rotor. On note  $Oz$  l'axe de ce tube de courant, l'origine  $O$  étant choisie dans le plan du rotor. En amont, loin du rotor, la section de ce tube de courant est  $S_1$  et la vitesse de l'eau, supposée uniforme, est  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_z$ ; en aval, loin du rotor, la section de ce tube de courant est  $S_2$  et la vitesse de l'eau, supposée uniforme, est  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_z$ ; on note  $\vec{v} = v \vec{e}_z$  la vitesse, supposée uniforme, sur la surface  $S$ . En dehors du tube de courant, la pression est supposée égale à une constante notée  $P_0$ . On remarquera que, des paramètres qui viennent d'être définis, seuls  $v_1$  et  $S$  sont fixés et connus. On cherche à déterminer, en fonction de  $\mu$ ,  $S$ ,  $v_1$  et  $v_2$ , la puissance prélevée par le rotor sur le courant. Les commentaires demandés sur les résultats obtenus sont relatifs à l'hydrolienne.

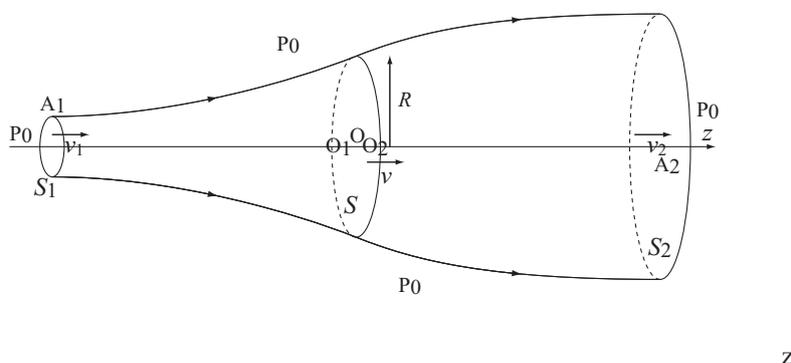


FIGURE 4 – Tube de courant s'appuyant sur le rotor

**26.** On fait l'hypothèse que l'eau est un fluide parfait en amont, jusqu'au plan perpendiculaire à  $Oz$  passant par  $O_1$ ; on fait la même hypothèse pour l'eau située en aval à partir du plan perpendiculaire à  $Oz$  passant par  $O_2$ . À partir des ordres de grandeur de la partie précédente relatifs à l'hydrolienne d'Orléans, expliquez comment on peut justifier cette hypothèse; expliquez pourquoi l'eau n'est pas assimilée à un fluide parfait entre les plans  $O_1xy$ . On néglige par la suite la longueur  $O_1O_2$ .

**27.** Établir deux relations indépendantes reliant  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v$ . Comparer  $S_1$  et  $S_2$ .

**28.** À partir d'un bilan de quantité de mouvement pour un système ouvert ( $S_1$ ) que l'on définira, exprimer la résultante  $\vec{F}$  des forces exercées par le rotor sur le fluide en fonction de  $\mu$ ,  $S$ ,  $v$ ,  $v_1$  et  $v_2$ . Quelle est la direction de  $\vec{F}$ ? Est-ce cohérent ?

**29.** À partir d'un bilan de quantité de mouvement pour un système ouvert ( $S_2$ ) que l'on définira, exprimer la résultante  $\vec{F}$  des forces exercées par le rotor sur le fluide en fonction de  $\mu$ ,  $S$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .

**30.** Dédire des deux expressions précédentes de  $\vec{F}$  que  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ .

**31.** Exprimer la puissance que prélève le rotor au courant en fonction de  $\mu$ ,  $S$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .

**32.** On admet que,  $\mu$ ,  $S$  et  $v_1$  étant donnés,  $v_2$  peut être choisi au travers des caractéristiques du rotor. Rechercher la valeur de  $v_2$  qui permet de prélever le maximum de puissance au courant, et déterminer la puissance maximale correspondante (limite de Betz).

**33.** Expliquer les 59 % évoqués à la question **22**.

Annexe 1, à rendre avec la copie, NOM : .....

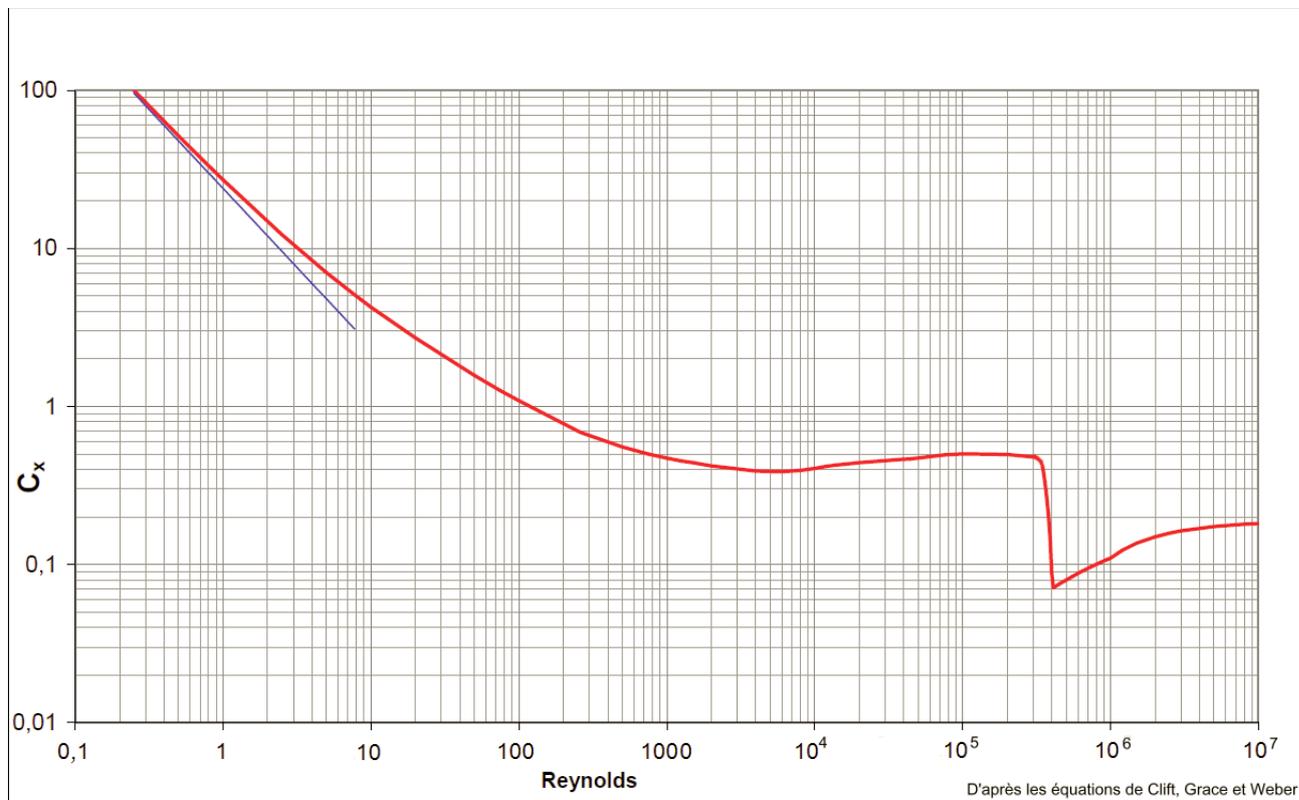


FIGURE 5 – Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds relatif au diamètre