

Corrigé du DS commun de physique n°4 - Mécanique des fluides

1 Écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère

1.1 Préliminaires

1. La force de viscosité exercée par la particule de fluide P_1 sur la particule de fluide P_2 est $\vec{F}_{P_1 \rightarrow P_2} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} S \vec{e}_x$;

elle tend à uniformiser le champ des vitesses.

2. On considère la résultante des forces de viscosité $\overrightarrow{dF_{vis}}$ qui s'exercent sur la particule de fluide P_2 située entre y et $y + dy$: elle comporte la force exercée par le fluide inférieur (en dessous de y) et celle exercée par le fluide supérieur (au dessus de $y + dy$), d'où, en utilisant l'expression précédente :

$$\overrightarrow{dF_{vis}} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y}(y, t) S \vec{e}_x + \eta \frac{\partial v}{\partial y}(y + dy, t) S \vec{e}_x = \eta S dy \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x = \eta d\tau \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\frac{\overrightarrow{dF_{vis}}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x}$$

$d\tau = S dy$ étant le volume de la particule de fluide P_2 . Pour l'écoulement particulier considéré, on trouve bien $\overrightarrow{\Delta} \vec{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x$, donc $\frac{\overrightarrow{dF_{vis}}}{d\tau} = \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$.

3. Une particule de fluide de volume $d\tau$ située en M à l'instant t a pour accélération $\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v}$; elle est soumise à la résultante des forces de pression $\overrightarrow{dF_p} = -\overrightarrow{grad} p d\tau$ et à la résultante des forces de viscosité $\overrightarrow{dF_{vis}}$, puisque l'on néglige toute force extérieure, d'où :

$$\boxed{\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad} p + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}} \quad (\text{équation de Navier-Stokes})$$

1.2 Écoulement autour d'une sphère

4. $\left[\frac{\eta}{\mu} \right] = L^2 T^{-1}$ puisqu'il s'agit de la viscosité cinématique, homogène à un coefficient de diffusion ;

$[V_0] = L T^{-1}$, donc $\frac{\eta}{\mu V_0} = \frac{\eta}{\mu V_0}$ est une longueur, d'où $D_0 = \frac{\eta}{\mu V_0}$.

On vérifie que c'est la seule possibilité en cherchant α, β et γ tels que $[\eta^\alpha \mu^\beta V_0^\gamma] = L$:

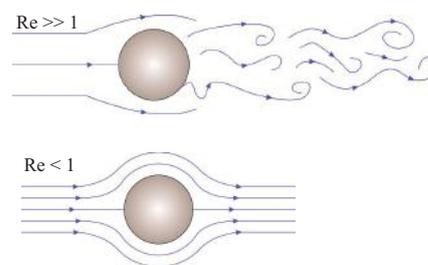
$$\begin{cases} [\eta] = M L^{-1} T^{-1} \\ [\mu] = M L^{-3} \\ [V_0] = L T^{-1} \end{cases} \Rightarrow [\eta^\alpha \mu^\beta V_0^\gamma] = M^{\alpha+\beta} L^{-\alpha-3\beta+\gamma} T^{-\alpha-\gamma} = L \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - 3\beta + \gamma = 1 \\ -\alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

ce qui donne bien, comme unique possibilité, l'expression proposée plus haut.

5. À partir de la définition du nombre de Reynolds : $Re = \frac{\mu V_0 D}{\eta} =$

$$\boxed{\frac{D}{D_0} = Re}$$

6. L'application numérique donne $D_0 = 1,4 \mu\text{m}$. Pour une sphère de rayon $R = 0,5 \text{ cm}$, $Re = 7200$, l'écoulement est donc turbulent dans le sillage de la sphère ; pour une sphère de rayon $R = 0,5 \mu\text{m}$, $Re = 0,7$, l'écoulement est laminaire. Les lignes de courant ont l'allure ci-contre.



7. La situation traitée présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz, la force \vec{F} , résultante des actions de contact exercées par le fluide sur la sphère, est donc dirigée selon Oz.

8. Pour un fluide fixé, η et μ sont fixés, les paramètres variables sont V_0 et D . $[C_x] = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-3}L^2T^{-2}L^2} = 1$; C_x est donc sans dimension et ne dépend que du nombre sans dimension qui est défini de façon unique à partir des paramètres V_0 et D de l'écoulement, donc de Re . Ainsi, C_x ne dépend que de Re .

$$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\mu V_0^2 \pi R^2}$$

9. Pour la courbe de l'annexe 1, aussi bien C_x que Re sont portés en échelles logarithmiques. Pour $Re < 1$, c'est une droite de pente -1 , ce qui signifie que C_x est inversement proportionnel à Re , donc que la force de traînée est linéaire en vitesse. Pour $1000 < Re < 300000$, C_x est pratiquement constant, ce qui signifie que la force de traînée est quadratique en vitesse. Le point correspondant à la sphère de rayon $R = 0,5 \mu m$, de $Re = 0,7$, se trouve dans le domaine linéaire et $C_x \approx 40$; celui correspondant à la sphère de rayon $R = 0,5 \text{ cm}$, de $Re = 7200$, se trouve dans le domaine quadratique et $C_x \approx 0,4$.

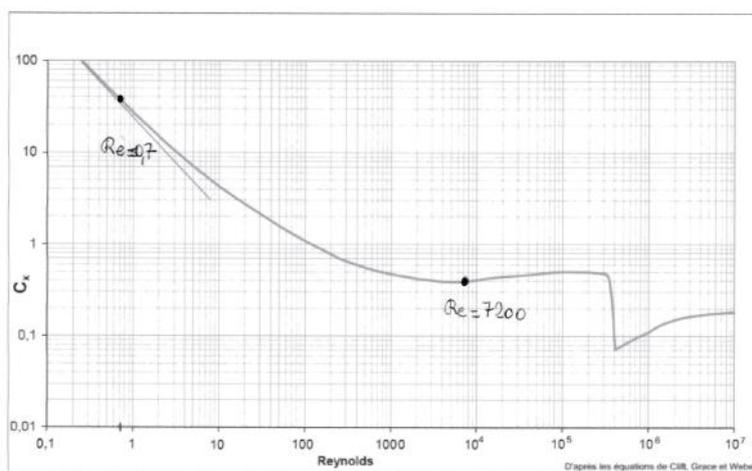


FIGURE 3 – Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds relatif au diamètre

$Re = 0,7 : C_x \approx 40$
 $Re = 7200 : C_x \approx 0,4$

FIGURE 1 – Coefficient de traînée

10. Compte-tenu de la lecture du graphe et des résultats précédents, $\vec{F} \approx 0,4 \times \frac{1}{2} \mu \pi R^2 V_0^2 \vec{e}_z = 0,2 \mu \pi R^2 V_0^2 \vec{e}_z \approx \vec{F}$

1.3 Établissement de la formule de Stokes

Toujours dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère, avec les notations de la partie précédente, on se place maintenant en régime permanent et on suppose la vitesse suffisamment faible pour négliger l'accélération convective.

11. a) L'écoulement étant incompressible, $div \vec{v} = 0$

b) La sphère étant un obstacle imperméable et fixe, $\vec{v}(r, \theta, \varphi) = \vec{0} \forall \theta, \forall \varphi$ (condition d'adhérence).

c) Pour $r \rightarrow +\infty$, $\vec{v} \rightarrow V_0 \vec{e}_z$

d) Comme le régime est permanent, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$; comme $Re < 1$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \approx \vec{0}$ (approximation linéaire), l'équation locale de la dynamique établie à la question 3 devient : $\overrightarrow{grad} P = \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$.

12. a) Grâce au formulaire, on calcule $div \vec{v}$:

$$div \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(V_0 \cos \theta (r^2 - \frac{3}{2} Rr + \frac{R^3}{2r}) \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-V_0 \sin^2 \theta (1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}) \right)$$

$$div \vec{v} = V_0 \cos \theta \left(\frac{2}{r} - \frac{3R}{2r^2} - \frac{R^3}{2r^4} \right) - 2V_0 \cos \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{3R}{4r^2} - \frac{R^3}{4r^4} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{div \vec{v} = 0}$$

b) Sur la sphère,

$$\vec{v}(R, \theta, \varphi) = V_0 \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \vec{e}_r - V_0 \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = \boxed{\vec{0} = \vec{v}(R, \theta, \varphi) \forall \theta, \forall \varphi}.$$

c) Lorsque $r \rightarrow \infty$, $\vec{v} \rightarrow V_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = V_0 \vec{e}_z$.

13. D'après l'énoncé, $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{v})) \neq \vec{0}$, donc $\overrightarrow{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$, donc l'écoulement est rotationnel, non potentiel; il n'est pas irrotationnel.

$Re \ll 1$, donc l'écoulement est laminaire, non turbulent.

L'écoulement est stationnaire (hypothèse de l'énoncé); le champ des vitesses donné dans l'énoncé est bien indépendant du temps.

14. On écrit l'équation locale de la dynamique; d'après le formulaire :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{v} = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{v}) = \frac{3V_0 R}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{grad} p = \eta \frac{3V_0 R}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}$$

On projette sur la base locale :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{3V_0 R \cos \theta}{r^3} \Rightarrow p(r, \theta) = -\eta \frac{3V_0 R \cos \theta}{2r^2} + f(\theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \eta \frac{3V_0 R \sin \theta}{2r^3} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = \eta \frac{3V_0 R \sin \theta}{2r^2} = \eta \frac{3V_0 R \sin \theta}{2r^2} + f'(\theta) \Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = cste \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p \text{ ne dépend pas de } \varphi \end{cases}$$

En définitive, $\boxed{p(r, \theta) = P_0 - \eta \frac{3V_0 R \cos \theta}{2r^2}}$ car $p \rightarrow P_0$ lorsque $r \rightarrow \infty$ (condition aux limites loin de la sphère).

15. Sur la sphère, la pression vaut : $p(R, \theta) = P_0 - \eta \frac{3V_0 \cos \theta}{2R}$, d'où la résultante des forces de pression sur la sphère orientée de l'intérieur vers l'extérieur :

$$\vec{F}_{pression} = \int \int_{sphere} -p(R, \theta) \vec{dS} = \int \int_{sphere} -P_0 \vec{dS} + \int \int_{sphere} \eta \frac{3V_0 \cos \theta}{2R} \vec{dS}$$

Le premier terme est nul (résultante de forces de pression sur une surface fermée soumise à une pression uniforme) et $\vec{dS} = \vec{e}_r R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Par ailleurs, comme Oz est axe de révolution, $\vec{F}_{pression}$ est parallèle à Oz, d'où

$$\vec{F}_{pression} = \vec{e}_z \eta \frac{3V_0}{2R} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \cos \theta \sin \theta \vec{e}_r(\theta, \varphi) \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \eta \frac{3RV_0}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \cos \theta \sin \theta \cos \theta$$

$$\vec{F}_{pression} = \vec{e}_z \eta \frac{3RV_0}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \cos^2 \theta \sin \theta = \vec{e}_z \eta \frac{3RV_0}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \boxed{2\pi \eta RV_0 \vec{e}_z = \vec{F}_{pression}}$$

16. Par analogie avec la situation traitée en question 1, on peut proposer :

$$\overrightarrow{dF_{cis}} \approx \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} (R, \theta, \varphi) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_\theta = \eta \left(-\frac{3 \sin \theta}{2} \frac{V_0}{R} \right) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_\theta$$

C'est bien l'expression proposée. (Remarque : en réalité, $\frac{\partial v_\theta}{\partial r}$ doit être remplacé par $r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)$ à cause de la courbure de la sphère ; cette expression donne le même résultat pour la force de cisaillement élémentaire). Comme pour la résultante des forces de pression, $\overrightarrow{F_{cis}}$ est parallèle à Oz car c'est un axe de révolution, donc :

$$\overrightarrow{F_{cis}} = \vec{e}_z \left(-\frac{3\eta R V_0}{2} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \left(\frac{3\eta R V_0}{2} \right) . 2\pi . \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \boxed{4\pi\eta R V_0 \vec{e}_z = \overrightarrow{F_{cis}}}$$

puisque $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = -\sin \theta$.

17. $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{pression} + \overrightarrow{F_{cis}} = \boxed{6\pi\eta R V_0 \vec{e}_z = \overrightarrow{F}}$; c'est bien la formule de Stokes.

Le coefficient de traînée vaut alors $C_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\mu V_0^2 \pi R^2} = \frac{12\eta}{\mu R V_0} = \frac{24\eta}{\mu V_0 D} = \boxed{\frac{24}{Re} = C_x}$ pour $Re < 1$; C_x est bien alors inversement proportionnel à Re comme le montre la courbe de l'annexe 1.

18. Au cours de sa chute, la bille de verre (de masse volumique ρ) est soumise, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, à :

- * son poids $\overrightarrow{P} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \vec{e}_z$, l'axe Oz étant orienté vers le haut ;
- * la poussée d'Archimède qui rend compte du gradient de pression dû à la pesanteur dans l'huile de masse volumique μ' : $\overrightarrow{\Pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu' g \vec{e}_z$;
- * la force de traînée, qui est $\overrightarrow{F} = -6\pi\eta' R \vec{v}$ si $Re < 1$.

L'expérience permet de mesurer η' si l'expression de la force de traînée est donnée par la formule de Stokes, i.e. si $\boxed{Re < 1}$. En effet, si $Re > 1$, les effets d'inertie se superposent aux effets de viscosité, et si $Re \gg 1$, les effets de viscosité deviennent même négligeables sur la force de traînée.

L'équation du mouvement de la bille est donc :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \vec{e}_z + \frac{4}{3}\pi R^3 \mu' g \vec{e}_z - 6\pi\eta' R \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{v} + \frac{2}{9} \frac{\rho R^2}{\eta'} \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{2}{9} \frac{(\rho - \mu') R^2 g}{\eta'} \vec{e}_z}$$

Au bout d'un temps de l'ordre de $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho R^2}{\eta'}$, la bille atteint sa vitesse limite $\vec{v}_\ell = -\frac{2}{9} \frac{(\rho - \mu') R^2 g}{\eta'} \vec{e}_z$, qui dépend de η' . La mesure de la vitesse limite permet donc d'accéder à la mesure de η' . Le protocole peut être : on filme la chute de la bille lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette transparente ; on point les positions successives de la bille, on calcule sa vitesse à l'aide d'un tableur, on observe sa stabilisation

à une valeur qui est la vitesse limite. On accède alors à $\boxed{\eta' = \frac{2(\rho - \mu') R^2 g}{9 v_\ell}}$.

On exprime la condition $Re < 1$:

$$Re = \frac{v_\ell D \mu'}{\eta'} = \frac{2(\rho - \mu') \mu' g \frac{D^3}{4}}{\eta'^2} < 1 \Rightarrow \boxed{D < \sqrt[3]{\frac{18\eta'^2}{\mu'(\rho - \mu')g}}}$$

Application numérique : $D_{max} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 1}{(965 \times (2500 - 965) \times 9,81)}} = 0,01 \text{ m} = 10 \text{ mm}$. La condition est donc

$\boxed{R < 5 \text{ mm}}$.

2 Approche documentaire

2.1 Questions

2.1.1 Ordres de grandeur

19. On exprime la puissance consommée par un foyer français en kW : 6000 kWh par an = $\frac{6000}{24 \times 365}$ kW. Comme l'hydrolienne Hydroquest River 1.40 fournit 40 kW dans les conditions nominales, elle peut alimenter $\frac{40 \times 24 \times 365}{6000} \approx 60$ foyers d'Orléans. C'est très peu, il faut donc utiliser une batterie d'hydroliennes pour répondre aux besoins d'une ville.

20. La source d'énergie est l'énergie cinétique contenue dans l'écoulement. La puissance disponible P pour l'hydrolienne est le débit d'énergie cinétique à travers la section S du rotor ; c'est donc l'énergie cinétique

contenue dans le volume $Svdt$ divisée par dt , c'est-à-dire $P = \frac{1}{2}\mu v^2 Sv = \boxed{\frac{1}{2}\mu Sv^3 = P}$, μ étant la masse volumique de l'eau. P est bien proportionnelle au cube de la vitesse, comme l'annonce le texte.

21. Application numérique : $P = \frac{1}{2} \times 1000 \times \pi \times (1,5)^2 \times (3,1)^3 = 1,1.10^2$ kW. Cette puissance est du même ordre de grandeur que celle que fournit l'hydrolienne (40 kW) ; P est cependant plus de deux fois plus grande, ce qui paraît cohérent, puisque P représente la puissance transportée par le courant à travers le rotor, alors que celle qui est donnée dans le texte est celle que récupère l'hydrolienne ; cette dernière puissance est plus faible, puisque l'hydrolienne ne stoppe pas le courant ; de plus, la conversion d'énergie de la forme mécanique à la forme électrique introduit un rendement supplémentaire *a priori* inférieur à 1.

22. La puissance P_{Pr} prélevée par la turbine vaut $P_{Pr} = 0,59P = 62$ kW ; elle se rapproche des 40 kW fournis par l'hydrolienne ; si l'écart est dû à la conversion mécanique-électrique, le rendement correspondant est de 65 %, ce qui paraît raisonnable.

23. Pour une éolienne de même section balayée et dans un écoulement de même vitesse, $P_{eol} = \frac{\mu_{air}}{\mu_{eau}} P_{hydro} = 130$ W. Grâce à l'inertie, 800 fois plus grande pour l'eau que pour l'air, la puissance disponible est beaucoup plus grande pour une hydrolienne que pour une éolienne de même taille avec la même vitesse d'écoulement. Par contre, les courants fluviaux ne dépassent pratiquement pas les 3 m/s, ce qui limite la puissance disponible.

24. $P_{hydro} = P_{nominale} \left(\frac{2}{3,1}\right)^3 = 40 \times \left(\frac{2}{3,1}\right)^3$ kW = 11 kW.

25. On calcule le nombre de Reynolds : $Re = \frac{vR\mu_{eau}}{\eta_{eau}} \approx \frac{2 \times 1,5 \times 1000}{10^{-3}} \approx 3.10^6 \gg 1$, puisque la viscosité de l'eau vaut $\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pa.s. On peut donc négliger les forces de viscosité presque partout et l'écoulement est turbulent.

2.2 Modélisation simple et limite de Betz

26. Comme $Re \gg 1$, on peut négliger les forces de viscosité dans le courant, ce qui justifie l'hypothèse d'écoulement parfait presque partout ; par contre, l'eau n'est pas assimilée à un fluide parfait entre les plans O_1xy et O_2xy parce que de forts gradients de vitesse existent au contact de la turbine.

27. L'eau étant un fluide incompressible, il y a conservation du débit volumique le long du tube de courant, donc $S_1v_1 = Sv = S_2v_2$. Comme l'hydrolienne prélève de l'énergie cinétique au courant, $v_2 < v_1$, donc, à cause de la conservation du débit volumique, $S_1 < S_2$, comme représenté sur le schéma de la figure 5.

28. Le système ouvert (S_1) est situé entre les plans A_1xy et A_2xy ; on effectue le bilan de quantité de mouvement sur le système fermé (Σ_1) qui contient à l'instant t le système (S_1)(t) et la masse d'eau qui pénètre dans le système entre t et $t + dt$; à l'instant $t + dt$, ce système contient le système (S_1)($t + dt$) et la masse qui sort du système entre t et $t + dt$. La variation de quantité de mouvement par unité de temps est alors, compte-tenu de l'hypothèse de régime stationnaire :

$$\frac{D\vec{P}_{\Sigma_1}}{Dt} = \frac{\vec{P}_{\Sigma_1}(t + dt) - \vec{P}_{\Sigma_1}(t)}{dt} = \mu v S (v_2 - v_1) \vec{e}_z$$

Le système fermé (Σ_1) est soumis à la force \vec{F} exercée par le rotor et à la résultante des forces de pression exercées par la pression uniforme P_0 ; cette force de pression est donc nulle. En définitive, $\vec{F} = \mu v S (v_2 - v_1) \vec{e}_z$. Comme $v_2 < v_1$, \vec{F} est dirigée selon $-\vec{e}_z$, ce qui est cohérent avec le fait que cette force ralentit le courant.

29. On procède de la même façon pour le système ouvert (S_2) situé entre les deux plans O_1xy et O_2xy ; le système fermé (Σ_2), contenant le système ouvert et la masse entrant pendant dt , est soumis à \vec{F} et à la résultante des forces de pression agissant en amont et en aval. Comme $v(O_1) = v(O_2) = v$:

$$\frac{D\vec{P}_{\Sigma_2}}{Dt} = \vec{0} = \vec{F} + (p_1 - p_2)S\vec{e}_z$$

On exprime $(p_1 - p_2)$ en utilisant le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant A_1O_1 et sur la ligne de courant O_2A_2 :

$$\frac{P_0}{\mu} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_1}{\mu} + \frac{1}{2}v^2 \text{ et } \frac{P_0}{\mu} + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{p_2}{\mu} + \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\mu(v_1^2 - v_2^2)$$

Finalement, $\vec{F} = -(p_1 - p_2)S\vec{e}_z = -\frac{1}{2}\mu S(v_1^2 - v_2^2)\vec{e}_z = \vec{F}$.

30. $\vec{F} = \mu v S (v_2 - v_1) \vec{e}_z = -\frac{1}{2}\mu S(v_1^2 - v_2^2)\vec{e}_z \Rightarrow v(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)$, d'où $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

31. La force \vec{F} s'applique sur la section où la vitesse est v , donc la puissance prélevée par le rotor au courant est $P_{Pr} = -\vec{F} v \vec{e}_z = \frac{1}{2}\mu S(v_1^2 - v_2^2) \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \frac{\mu S}{4}(v_1^2 - v_2^2)(v_1 + v_2) = P_{Pr}$.

32. On dérive P_{Pr} par rapport à v_2 :

$$\frac{dP_{Pr}}{dv_2} = \frac{\mu S}{4}(-2v_2(v_1 + v_2) + v_1^2 - v_2^2) = \frac{\mu S}{4}(v_1 + v_2)(v_1 - 3v_2)$$

Pour $v_2 = \frac{1}{3}v_1$, $\frac{dP_{Pr}}{dv_2} = 0$ et change de signe; pour $v_2 < \frac{1}{3}v_1$, $\frac{dP_{Pr}}{dv_2} > 0$; pour $v_2 > \frac{1}{3}v_1$, $\frac{dP_{Pr}}{dv_2} < 0$; il

s'agit donc bien d'un maximum et $P_{PrMax} = \frac{8}{27}\mu S v_1^3$.

33. La puissance transportée par le courant est $P = \frac{1}{2}\mu S v_1^3$, donc $\frac{P_{PrMax}}{P} = \frac{16}{27} \approx 0,59$, ce qui signifie bien que la puissance maximale prélevée par le rotor vaut 59 % de la puissance transportée par le courant.