Thème : mesures et incertitudes

Objectifs :

- ☐ Distinguer les notions de grandeur, valeur et unité
- ☐ Citer les sept unités de base du système international
- ☐ Identifier les principales sources d'erreurs lors d'une mesure.
- ☐ Exploiter des séries de mesures indépendantes pour comparer plusieurs méthodes de mesure d'une grandeur physique, en terme de justesse et de fidélité.
- ☐ Procéder à une évaluation par une approche statistique (type A) d'une incertitude type.
- ☐ Estimer une incertitude-type sur une mesure unique.
- ☐ Exprimer un résultat de mesure avec le nombre de chiffres significatifs adaptés et l'incertitude-type associée et en indiquant l'unité correspondante.
- ☐ Discuter de la validité d'un résultat en comparant la différence entre le résultat d'une mesure et la valeur de référence d'une part et l'incertitude-type d'autre part.

Sommaire

1. Exercices d'introduction

Exercice 1

On mesure avec un chronomètre la durée $t = (50,256 \pm 0,005)$s.
1. Quelle est l'unité de cette valeur ?
2. Quel est la mesurande ?
3. Que vaut l'incertitude de mesure ?
4. Quel est le nombre de chiffres significatifs de cette mesure ?

Exercice 2

Rectifier si nécessaire, l'écriture des mesurages suivants :

Donnée	Écriture corrigée	Écriture scientifique
$V = (100,0 \pm 0,5)$ mL		
$t = (60,00 \pm 0,4)$ s		
$m = (3,56 \pm 0,0584)$ g		
$\ell = (10 \pm 0,5)$ cm		

Exercice 3

Écrire correctement le résultat des mesurages suivants (on suppose une unique source d'erreurs pour chaque mesure).
1. Avec une règle on mesure $\ell = 90,5$ cm. L'incertitude-type de lecture vaut $u_{lect} = 1$ cm.
2. Avec une balance, on pèse $m = 0,896$ g. L'incertitude-type de résolution vaut $u_{res} = 0,02$ g.
3. On mesure une tension $U = 12,05$ V. L'incertitude-type de précision vaut $u_{pre} = 0,1$ V.

Exercice 4

On dispose d'une résistance dont la valeur donnée par le constructeur est $R = (1000 \pm 50)\ \Omega$.
On dispose de deux ohmmètres et on possède la notice d'un des ohmmètres. Pour déterminer la valeur de la résistance avec précision on fait deux séries de mesurages :

- avec l'ohmmètre possédant une notice on mesure 987,8 Ω. La précision de l'appareil est 0,8$\%$ de la valeur lue plus 4 digits.
- avec l'ohmmètre ne possédant pas de notice, on réalise une série de 8 mesurages, donnée ci-dessous.

Mesure N°	1	2	3	4
Valeurs (Ω)	986,1	987,4	988,1	987,0
Mesure N°	5	6	7	8
Valeurs (Ω)	988,0	987,8	986,9	988,9

1. Quelle mesurage correspond à une évaluation de l'incertitude de type A ? de type B ?
2. Calculer l'incertitude-type $u(R)$ pour chacune des méthodes.
3.Présenter les résultats de ces deux mesurages sous la forme $R = (\cdots \pm u(R))$ unité.
4. Quelle est la méthode la plus précise ?

Exercice 5

Voici les caractéristiques d'une balance.

- Portée max : 220 g
- Portée mini : 0,02 g
- Résolution : 0,1 mg
- Écart maximal toléré : 1 mg

Pour qu'une balance soit homologuée, il faut que la fidélité et le biais soient inférieurs à l'écart maximal toléré.

Fidélité d'une balance

On réalise successivement six mesures d'une masse étalon de valeur nominale 50,0000 g.

Mesure N°	1	2	3
Valeurs (g)	50,0000	49,9997	49,9996
Mesure N°	4	5	6
Valeurs (g)	50,0004	50,0001	49,9999

Calculer l'écart-type et **comparer** cette valeur à l'écart maximal toléré. **Conclure**.

Justesse d'une balance

On réalise successivement six mesures des trois masses étalons, respectivement de valeur nominale 0,1000 g, 50,0000 g et 200,0000 g.

Étalon 1

Mesure N°	1	2	3
Valeurs (g)	0,0999	0,0997	0,1001
Mesure N°	4	5	6
Valeurs (g)	0,1005	0,0994	0,1002

Étalon 2

Mesure N°	1	2	3
Valeurs (g)	50,0004	50,0000	49,9997
Mesure N°	4	5	6
Valeurs (g)	49,9998	50,0002	50,0000

Étalon 3

Mesure N°	1	2	3
Valeurs (g)	200,0010	200,0008	200,0018
Mesure N°	4	5	6
Valeurs (g)	200,0015	200,0017	200,0009

Calculer le biais pour chacune des pesées et le **comparer** avec l'écart maximal toléré. **Conclure**.

Exercice 6

Grâce au montage ci-dessus, on souhaite vérifier la loi d'Ohm. Pour cela, on mesure la tension U aux bornes de la résistance et l'intensité I la traversant avec deux multimètres identiques.
Les tableaux ci-dessous sont extraits de la notice des multimètres.

Tension continue

Gamme	200,0 mV	2,000 V	20,00 V	200,0 V	1000 V
Résolution	0,1 mV	1 mV	10 mV	100 mV	1 V
Précision	± 0,5% affich. ± 2 dgts			± 0,8% affich. ± 2 dgts	

Courant continu

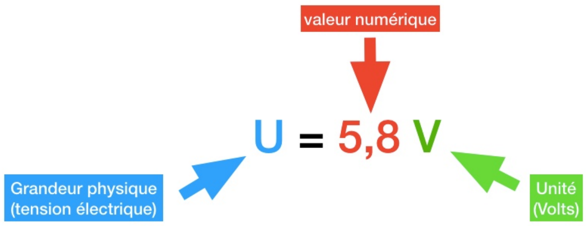
Gamme	2,000 mA	20,00 mA	200,0 mA	20,0 A
Résolution	1 μA	10 μA	100 μA	10 mA
Précision	± 2,5% affich. ± 10 dgts		± 1,5% affich. ± 3 dgts	± 2,5% affich. ± 10 dgts

Les résultats des mesures sont : $U = 9,95$ V, $I = 4,52$ mA.

1. On a utilisé les calibres permettant le mesurage le plus précis. Quels calibres a-t-on utilisé pour ces deux mesures ?
2. Donner les résultats des mesures sous la forme $U = (\cdots \pm u(U))$ unité et $I = (\cdots \pm u(I))$ unité.

2. Cours

2.1 Grandeurs, valeurs et unités



— La **grandeur** est la propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de référence, ou une de leur combinaisons.

— La **valeur** est l'ensemble d'un nombre et d'une référence constituant l'expression quantitative d'une grandeur. C'est souvent le produit d'un nombre et d'une unité de mesure.

— L'**unité** est une grandeur scalaire réelle, définie et adoptée par convention à laquelle on peut comparer toute autre grandeur de même nature.

Les unités sont issus du **Système International** (S.I.). Ce système est basé sur sept grandeurs de base :

Grandeur	Longueur	Masse	Temps	Courant électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Unité	Mètre (m)	Kilogramme (kg)	Seconde (s)	Ampère (A)	Kelvin (K)	Mole (mol)	Candela (cd)

2.2 Les sources d'erreurs

— La grandeur que l'on veut mesurer est appelée le **mesurande**, noté M.

— Le **mesurage** est le processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs, que l'on peut attribuer à une grandeur.

— La **valeur vrai du mesurande** est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage état parfait.

— Lors de la mesure d'une grandeur physique m, l'**erreur de mesure** est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie. Dans des mesurages répétés, on distingue deux composantes de l'erreur de mesure :

- l'**erreur systématique** qui est constante ou varie de manière prévisible.
- l'**erreur aléatoire** qui varie de façon imprévisible.

— L'**incertitude de mesure** ΔM est un paramètre, associé au résultat du mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être attribuées au mesurande.

— Le résultat n'est jamais une valeur : il est donnée sous forme d'**intervalle des valeurs probables** du mesurande m avec l'unité appropriée :

$$M = (m \pm \Delta M) \text{ unité}$$

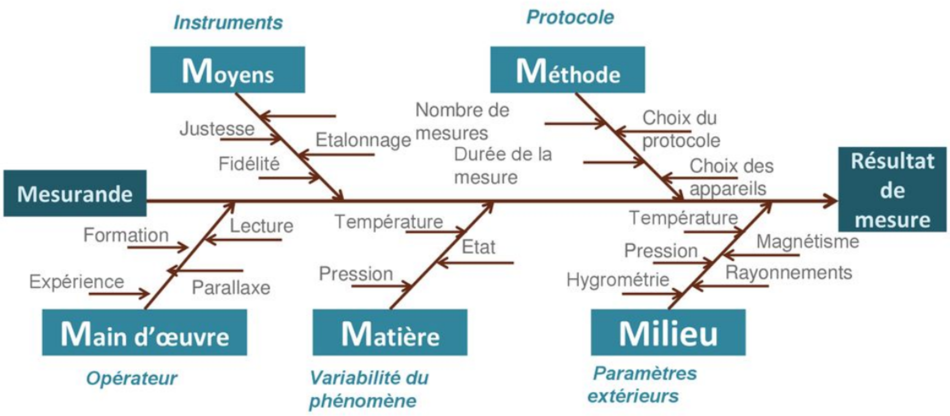


FIGURE 1 – *Méthode des « 5 M » qui permet l'inventaire des sources d'erreurs.*

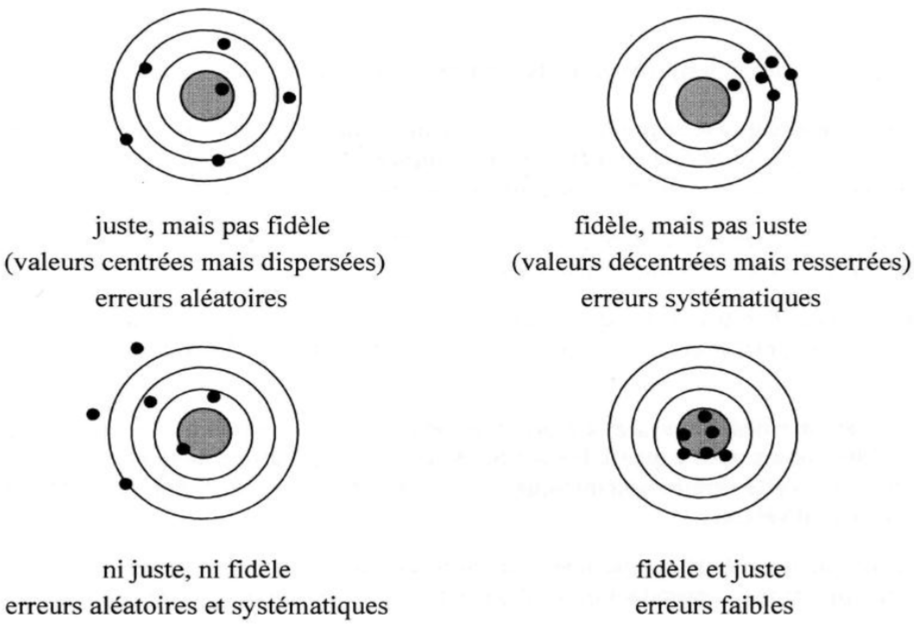


FIGURE 2 – *Justesse et fidélité.*

2.3 Évaluation des incertitudes

a) Incertitudes de type A

Un même opérateur effectue n mesures du même mesurande m dans les mêmes conditions. Si les valeurs mesurées sont différentes, alors il y a une **erreur de répétabilité** dont l'origine est souvent inconnue.

D'une mesure à l'autre, cette erreur peut prendre une valeur différente : l'erreur de répétabilité est une **erreur aléatoire**. Elle est évaluée par une méthode statistique.

L'estimation du résultat de la mesure est donnée par la **moyenne arithmétique** :

$$\overline{m} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{1}$$

L'incertitude de mesure ΔM sera égale à **l'incertitude-type** $u(m)$ déterminée par le calcul de l'écart-type expérimental sur la moyenne :

$$u(m) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2} \tag{2}$$

b) Incertitudes de type B

L'évaluation de **type B** est effectuée par des moyens autres que l'analyse statistique d'une série d'observations.
Le plus fréquemment, on a recours à une évaluation type B lorsque l'on ne dispose que d'une seule valeur mesurée.

On distingue plusieurs cas :

— L'incertitude-type u fournie par le **constructeur**. Dans ce cas, on utilise directement son incertitude.

— Pour un appareil de mesure analogique (lecture sur une règle, cadran), l'**incertitude-type de lecture** $u_{lecture}$ est estimée à partir de la valeur d'une graduation à l'aide de la relation :

$$u_{lecture} = \frac{1\text{graduation}}{\sqrt{12}} \tag{3}$$

— Si on possède une indication sur la **précision de l'appareil** de type $u(c)$ sans autre information, on prend alors pour incertitude-type la valeur suivante :

$$u = \frac{u(c)}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

2.4 Présentation d'un résultat

Lors de la mesure d'une grandeur, on conserve uniquement les chiffres qui sont utiles, c'est à dire les chiffres qui sont en accord avec la **précision de l'instrument de mesure utilisé**.
$\rightarrow$ Ces chiffres sont appelés **chiffres significatifs**.

L'incertitude de mesure ΔM s'écrit toujours avec un chiffre significatif, et arrondie dans tous les cas par excès.
Pour l'estimation de la grandeur mesurée M, on prendra comme dernier chiffre significatif, celui ayant la même position que celui de l'incertitude.
On notera par exemple pour une longueur : $\ell = (11,00 \pm 0,06) cm$ et non $\ell = (11,0 \pm 0,06) cm$ ou encore $\ell = (11,000 \pm 0,06) cm$, c'est à dire donner le résultat avec le même nombre de chiffres après la virgule que la valeur de l'incertitude.

3. Activité : chiffres significatifs et conversions

Objectif :
- Exprimer un résultat de mesure avec le nombre de chiffres significatifs adaptés.
- Distinguer les notions de grandeur, valeur et unité.

Mesure et chiffres significatifs

Lors de la mesure d'une grandeur, on considère uniquement les chiffres qui sont utiles, c'est-à-dire ceux qui sont en accord avec la précision de l'instrument de mesure utilisé. Ces chiffres sont appelés « chiffres significatifs » (ou CS).
→ Pour déterminer les chiffres significatifs d'une mesure, on compte les chiffres dont on connait avec précision la valeur (chiffres certains) + le premier chiffre incertain.

Remarque : si aucune indication n'est fournie sur l'incertitude de mesure d'un instrument, alors on considère qu'elle correspond à la moitié de la plus petite unité qu'affiche l'instrument.

Exemple :

L'extrémité de l'enveloppe se trouve entre la 11^{eme} et la 12^{eme} graduation de la règle, plus près de 11 que de 12.
La largeur de l'enveloppe vaut :

$$L = (11,0 \pm 0,6) \text{ cm}$$

Que l'on peut aussi écrire sous forme d'intervalle :

$$10,4 \text{ cm} \leq L \leq 11,6 \text{ cm}$$

Cette mesure possède 3 CS : 2 chiffres certains et 1 chiffre incertain.

La précision de la règle est le centimètre et la mesure est effectuée au 1/2 centimètre près.

L'extrémité de l'enveloppe se trouve entre la graduation 11,0 et la graduation 11,1, plus près de 11 que de 11,1.
La largeur de l'enveloppe vaut :

$$L = (11,0 \pm 0,06) \text{ cm}$$

Que l'on peut aussi écrire sous forme d'intervalle :

$$10,94 \text{ cm} \leq L \leq 11,06 \text{ cm}$$

Cette mesure possède 4 CS : 3 chiffres certains et 1 chiffre incertain.

La précision de la règle est le millimètre et la mesure est effectuée au 1/2 millimètre près.

Chiffres significatifs d'une mesure

Il faut respecter les trois règles suivantes :

1. Les zéros situés à **droite** d'un chiffre compris entre 1 et 9 sont **significatifs**.

   3,000 contient 4 chiffres significatifs 8,07 contient 3 chiffres significatifs

2. Les zéros situés à **gauche** d'un nombre compris entre 1 et 9 ne sont **pas significatifs**, ils ne servent qu'à donner un ordre de grandeur.

   0,0008 contient 1 chiffres significatifs

3. **Tous les chiffres** sont significatifs dans les **valeurs publiées** dans les tables, les **valeurs obtenues** par comptage et les **définitions**.

   $c = 299792458$ m.s^{-1} (célérité de la lumière) contient 9 chiffres significatifs

Exercice

Retrouver le nombre de chiffres significatifs dans les valeurs ci-dessous.

Valeurs	CS	Valeurs	CS
$I = 25,21$ mA		$L = 8,30 \times 10^4$ m	
$U = 0,48$ V		$n = 5,03 \times 10^{-3}$ mol	
$T = 48,80$ s		$T = 7,63 \times 10^6$ K	
$m = 1,000$ kg		$I = 0,020 \times 10^5$ cd	

Calculs et chiffres significatifs

Multiplication et division

Règle : Le résultat d'une multiplication ou d'une division a autant de chiffres significatifs que la mesure la moins précise utilisée dans le calcul.

Exemple :

$$\frac{206,53 \times 6,28}{22,05} = 58,82124263 = 58,8$$ **(3 chiffres significatifs)**

Addition et soustraction

Règle : Le résultat d'une addition ou d'une soustraction a autant de décimales que la mesure la moins précise utilisée dans le calcul.

Exemple :

$$52,08 + 10,2 - 3,89 = 62,28 = 62,3$$ **(on ne garde qu'un chiffre après la virgule)**

Arrondi

Le résultat d'un calcul à la calculatrice contient souvent beaucoup de chiffres. Il convient donc de l'arrondir pour respecter le bon nombre de chiffres significatifs.

Méthode :

1. Choisir le **dernier chiffre** (de droite) à conserver.
2. Si le chiffre suivant vaut **au moins 5** (donc 6, 7, 8, 9) alors on augmente le chiffre conservé d'une unité (arrondir à l'excès).
3. SI le chiffre est **strictement inférieur à 5** (donc 0, 1, 2, 3, 4) alors on conserve ce chiffre (arrondir par défaut).

Cette méthode limite l'accumulation d'erreurs lors de calculs successifs.

Exercices

Exercice 1

Convertir en notation décimale :
$5,78 \times 10^4 =$
$2,46 \times 10^2 =$
$7,4 \times 10^{-3} =$
$3,3 \times 10^{-1} =$
$2,2 \times 10^3 =$

Exercice 2

Effectuer les calculs suivants :
$10^8 \times 10^2 =$
$10^3 \times 10^{-5} =$
$\frac{10^5}{10^2} =$
$\frac{10^2}{10^4} =$

Exercice 3

Quel est le nombre de chiffres significatifs des mesures suivantes : $d = 2,15$ m
$d = 0,0012$ m
$d = 1200$ m
$d = 0,00010$ mm
$d = 1,30 \times 10^{-2}$ m
On désire arrondir la valeur 378,233 m à un seul chiffre significatif. Que faut-il faire ?

Exercice 4

Effectuer les calculs suivants, en respectant le nombre de chiffres significatifs : $3,2 + 1,168 =$
$2,000 \times 3,20 =$
$3,72 - 0,5 =$
$2,20 \times (2 + 1,2) =$
$\frac{5,0}{2,35} =$

Exercice 5

1. Calculer le périmètre P d'un rectangle de longueur $\ell = 10$cm et de largeur $L = 5,2$ cm.
2. Calculer la surface S de ce même rectangle.
3. Calculer l'énergie cinétique E_c d'une voiture de masse $m = 1000$ kg se déplaçant à la vitesse $v = 30$ m.s^{-1}.
4. Calculer en J puis en eV, la valeur de l'énergie d'un photon correspondant à la radiation de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 486$ nm, dans le spectre d'émission d'une lampe à vapeur d'hydrogène. Quelle est l'unité d'énergie adaptée pour un photon visible ?

Données :

$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s $\quad c = 2999792458$ m.s^{-1} $\quad 1eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$