Fonctions $f + g$

1er Gestion - Administration
Mr. Marchetti

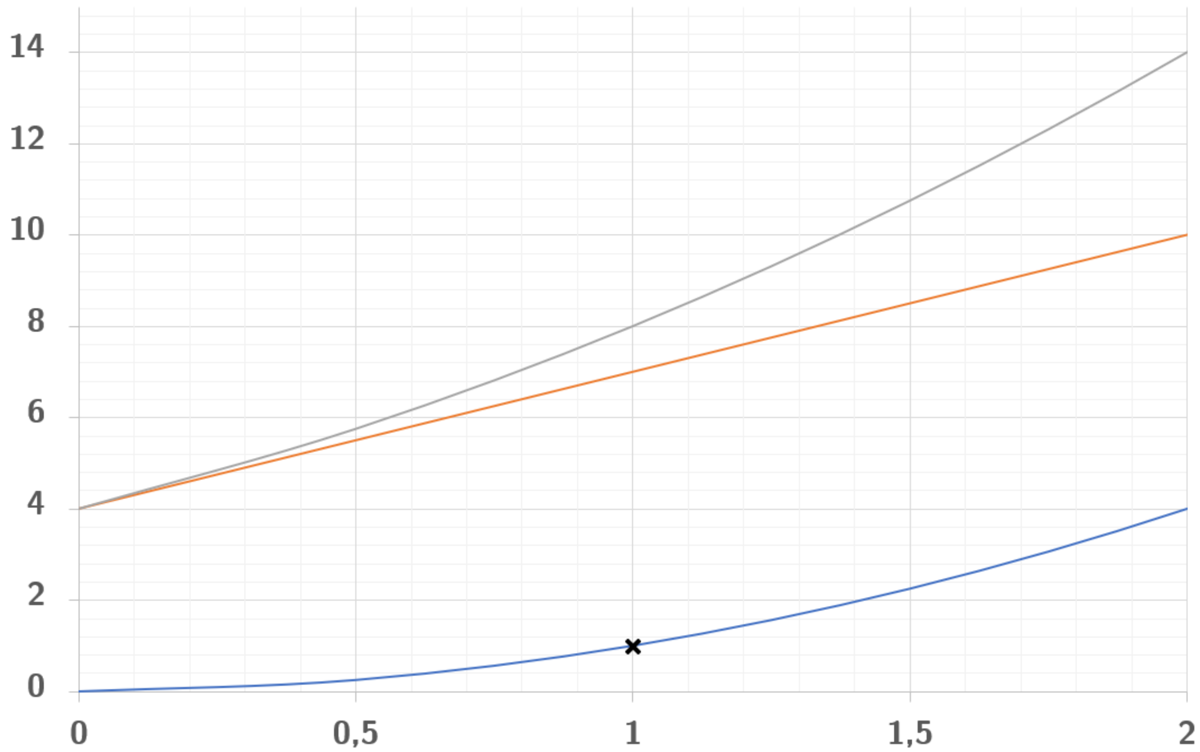
Activité 1 : Comment étudier une fonction du type f+g ?

Partie 1 : Somme de deux fonctions croissantes

Nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = x^2\,;\; g(x) = 3x + 4\,;\; h(x) = x^2 + 3x + 4$$

Le point $\times$ est le point de coordonnées (1 ;1).



1. À l'aide de votre calculatrice, **tracer** la représentation de ces trois fonctions.

2. L'une de ces trois courbes est un segment de droite. De quelle fonction est-elle la courbe représentative ?
Parmi les trois courbes, celle qui est un segment de droite est la courbe orange. Cette courbe correspond à la fonction affine $g(x) = 3x + 4$.

3. De quelle fonction la courbe qui passe par le point de coordonnées (1 ;1) est-elle la courbe représentative ?
La seule fonction qui donne 1 lorsque $x = 1$ est la fonction $f(x)$. En effet $f(1) = 1^2 = 1$..

4. La courbe non repérée aux questions **2.** et **3.** est la courbe représentative sur $[0; 2]$ de la fonction $h : x \mapsto x^2 + 3x + 4$. Cette fonction est définie par $h(x) = f(x) + g(x)$. On dit que h est la fonction somme des fonctions f et g et on écrit $h = f + g$.

a) Quel est, sur l'intervalle $[0;2]$, le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2$?

x	0		2
Fonction $f(x)$	0	$\nearrow$	2

b) Quel est, sur l'intervalle $[0;2]$, le sens de variation de la fonction affine $g : x \mapsto 3x+4$?

x	0		2
Fonction $g(x)$	4	$\nearrow$	10

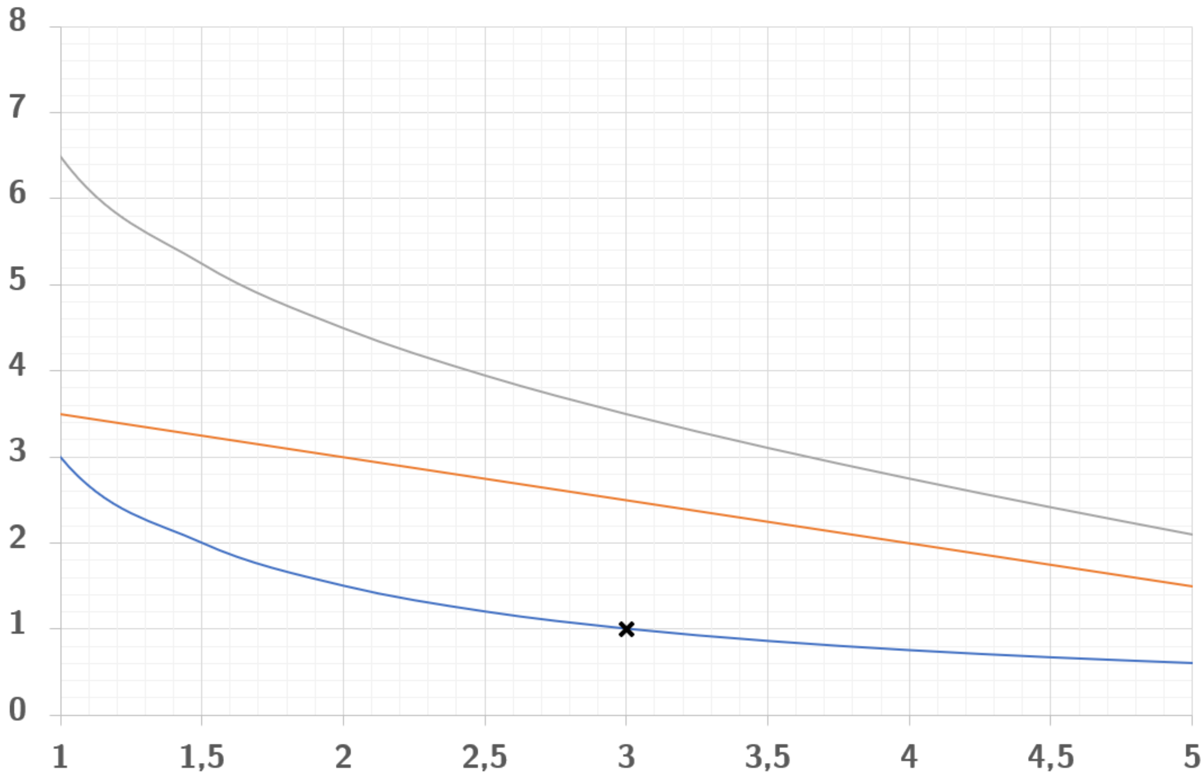
c) À partir de l'observation du graphique, **donner** le sens de variation sur $[0;2]$ de la fonction $h = f + g$.
D'après le cours la somme de deux fonctions croissantes sur un intervalle I donne une fonction croissante sur ce même intervalle. On a $h = f+g$. Les fonctions f et g sont croissantes sur l'intervalle $[0;2]$, alors la fonction h est une fonction croissante sur l'intervalle $[0;2]$.

Partie 2 : Somme de deux fonctions décroissantes

Nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[1;5]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{x}\,;\ g(x) = -0.5x + 4\,;\ h(x) = \frac{3}{x} - 0.5x + 4$$

Le point $\times$ est le point de coordonnées (3 ;1).



1. À l'aide de votre calculatrice, **tracer** la représentation de ces trois fonctions.

2. Indiquer quelle est courbe est la représentation graphique de f.
La fonction f est définie par $f(x) = 3/x$. Pour $x = 1$ on a $f(1) = 3$. La seule courbe remplissant cette condition est la courbe bleue. La fonction f est donc la courbe bleue.

3. Indiquer quelle est courbe est la représentation graphique de g.
La fonction g est définie par $g(x) = -0.5x + 4$. Pour $x = 1$ on a $g(1) = 3.5$. La seule courbe remplissant cette condition est la courbe orange. La fonction g est donc la courbe orange.

4. On sait que, sur l'intervalle $[1; 5]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante. **En déduire** le sens de variation de f.
Si la fonction $1/x$ est décroissante, alors on en déduit que la fonction f est également décroissante sur l'intervalle $[1; 5]$.

5. La fonction g est une fonction affine. **Indiquer**, en justifiant la réponse, le sens de variation de g.
D'après le graphique on remarque que la valeur de g diminue plus la valeur de x augmente. La fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1; 5]$.

6. Vérifier que la fonction h est la fonction somme des fonctions $f + g$.
La fonction h est définie par $h(x) = \dfrac{3}{x} - 0.5x + 4$. La somme des fonctions $f + g$ donne $f(x) + g(x) = \dfrac{3}{x} - 0.5x + 4$. On retrouve l'expression de la fonction $h(x)$. On a alors $h = f + g$.

7. À partir de l'observation du graphique, **donner** le sens de variation de h.
D'après l'observation du graphique, on remarque que la valeur de $h(x)$ diminue plus la valeur de x augmente. La fonction h est décroissante sur l'intervalle $[1; 5]$.

À retenir

- Si f et g sont **croissantes** sur I, alors $f+g$ est **croissante** sur I.
- Si f et g sont **décroissantes** sur I, alors $f+g$ est **décroissante** sur I.

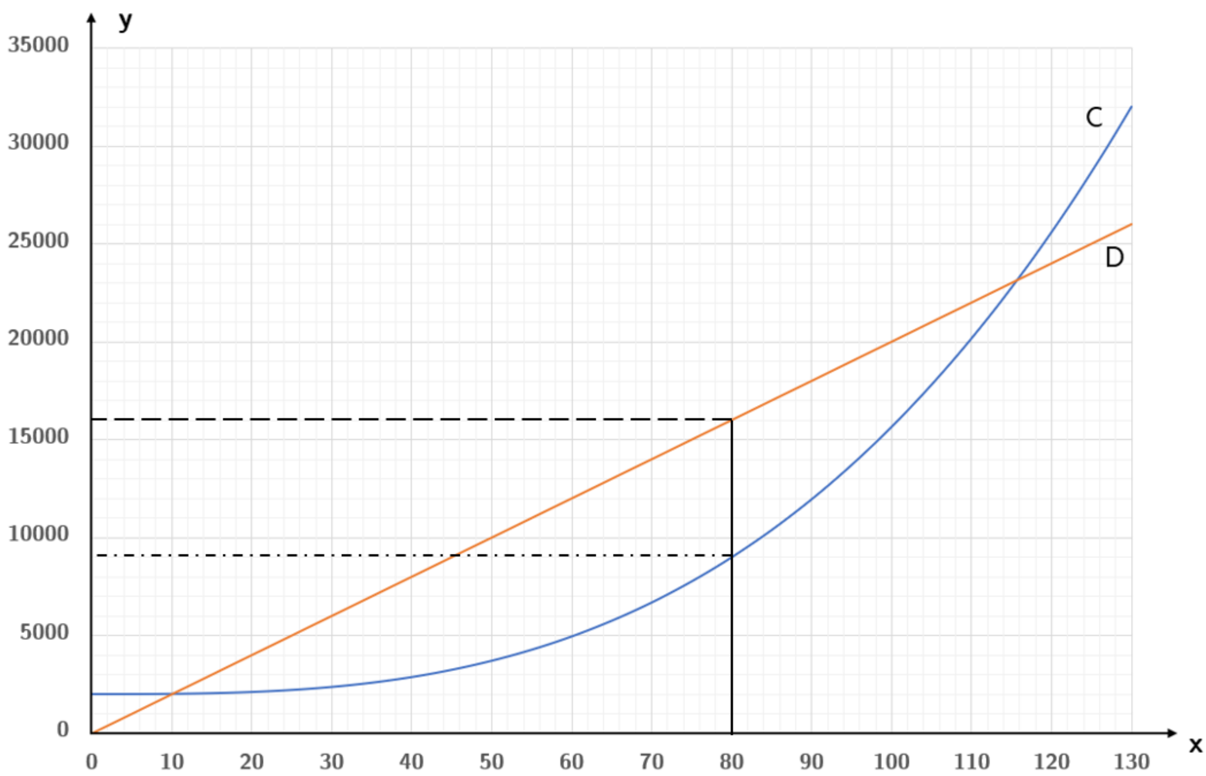
Activité 2 : Comment résoudre graphiquement une inéquation ?

Une entreprise fabrique des articles informatiques. On suppose que toute sa production mensuelle est vendue.
On appelle :

- $C(x)$ le coût de production, en euros, de x articles ;
- $R(x)$ la somme, en euros, rapportée par la vente des x articles.

On suppose que $0 \leq x \leq 130$.
Les fonctions C et R sont représentées ci-contre :

- C est représentée par la droite C ;
- R est représentée par la droite D.



1. Quel est l'axe représentant le nombre d'article ? et la somme en euro ?
L'axe représentant le nombre d'article est l'axe des abscisses (axe horizontal). La somme en euro est représentée par l'axe des ordonnées (axe vertical).

2.a)Déterminer graphiquement le coût de production de 80 articles.
D'après le graphique (trait – –), on lit que pour 80 articles le coût de production est de 9 000 euros.

b) Déterminer graphiquement la somme rapportée par la vente de 80 articles.
D'après le graphique (trait – · –), on lit que pour 80 articles la somme rapportée est de 16 000 euros.

c) Si l'entreprise fabrique et vend 80 articles, réalise-t-elle un bénéfice ou une perte ?
Si l'entreprise fabrique et vend 80 articles, cela lui rapporte 16 000 par les ventes et lui coûte 9 000 de production. La somme gagnée est supérieur à la somme perdue, elle réalise alors un bénéfice. Ce bénéfice est de $16000 - 9000 = 5000$ euros.

3. L'entreprise fabrique et vend 120 articles. En utilisant le graphique, **indiquer** si, dans ce cas, elle est bénéficiaire ou déficitaire.
De la même façon que les questions précédentes, on observe le graphique. Il y a deux méthodes :

- On peut lire l'ordonnée pour la courbe C et D pour savoir la somme gagnée (courbe D) et perdue (courbe C) pour $x = 120$.
- On peut également remarquer que pour $x = 120$, la courbe C est "au-dessus" de la courbe D. Alors on peut directement en déduire que la somme perdue et supérieur à la somme gagnée.

Ainsi on doit en conclure que pour 120 articles l'entreprise est déficitaire.

4. Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles D est « au-dessus » de C.
La courbe D est au-dessus de la courbe C quand x appartient à l'intervalle $[10, 116]$. Pour trouver cela il suffit de lire l'abscisse des points d'intersections de ces deux courbes.

5. Pour ces valeurs de x, **compléter** par le symbole convenable $<$ ou $>$ l'inégalité :

$$R(x) > C(x)$$

6. Indiquer pour combien d'articles fabriqués et vendus la fabrication est rentable.
La fabrication est rentable lorsque l'argent gagnée est supérieur à l'argent perdue à travers la production. Cela est possible sur l'intervalle $[10, 116]$. Cela signifie donc que l'entreprise est rentable pour une fabrication comprise entre 10 articles et 116 articles.

À retenir

- Les solutions de l'inéquation $R(x) > 0$ sont les **abscisses** des points de D qui sont situés **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- Les solutions de l'inéquation $R(x) \geq C(x)$ sont les **abscisses** des points de D qui sont situés **au-dessus** de C et les **abscisses** des points **communs** à D et C.