Fluctuation d'échantillonnage

1er Gestion - Administration

1. Notion de fluctuation d'échantillonnage

Ce premier paragraphe constitue un rappel du cours de seconde.

Lorsque l'on répète n fois une expérience aléatoire, l'ensemble des résultats collectés constitue un échantillon de taille n .

Qu'est ce qu'une expérience **aléatoire** ?
C'est un expérience imprévisible, liée au hasard.

Exemple d'expérience aléatoire : jouer aux dés, au loto, aux cartes, etc ….

Exemple :

- On lance 50 fois un dé cubique bien équilibré.
  - Quelles sont les éventualités (ou issues) possibles ? $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
  - Quelle est la taille de l'échantillon ? $n = 50$.
  - On réalise un premier échantillon pour lequel on obtient :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	8	5	9	9	8	11

  - Quelle est la fréquence de sortie de la face 2 ? 5/50=0.10 soit 10%.
  - Quelle est la fréquence de sortie de la face 5 ? 8/50=0.16 soit 16%.

- On lance recommence 3 fois la prise d'échantillon de taille 50. On obtient :

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence échantillon A	0.16	0.1	0.18	0.18	0.16	0.22
Fréquence échantillon B	0.20	0.10	0.16	0.12	0.22	0.20
Fréquence échantillon C	0.12	0.22	0.14	0.16	0.18	0.18

Obtient-on les mêmes résultats ? Qu'observe-t-on ?
Non. La fréquence de sortie de chaque face du dé prend des valeurs différentes selon les échantillons.
Ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

- On simule par informatique 5000 lancers de dé.
  - Quelle est la taille de l'échantillon ? $n = 5000$.

– On réalise la prise de 3 échantillons de on obtient les résultats suivant :

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence échantillon A	0.165	0.170	0.162	0.161	0.168	0.174
Fréquence échantillon B	0.162	0.161	0.167	0.178	0.167	0.165
Fréquence échantillon C	0.174	0.166	0.163	0.162	0.168	0.167

– Qu'observe-t-on ?
Les fréquences de sorties de chacun des 6 faces sont très proches les unes des autres.

– Quelle est l'influence de la taille des échantillons ?
Plus la taille de l'échantillon est grande et moins les fréquences **fluctuent**.

– Vers quelle valeur tend la fréquence de sortie de chaque face ?
Elle tend vers une valeur commune voisine de 0.166.

– A quoi correspond cette valeur ?
Elle correspond à la **probabilité** d'obtenir une face lors du lancer du dé. En effet, **le dé étant bien équilibré**, chaque face a la même probabilité de sortie.
Soit 1/6=0.166666...

À retenir

- La fréquence d'un même caractère sur plusieurs échantillons de même taille prend des valeurs différentes selon les échantillons.

- Ce phénomène s'appelle la fluctuation d'échantillonnage
- Plus la taille de l'échantillon est grande et moins les fréquences fluctuent.
- Pour un grand échantillon, la fréquence est proche de la probabilité.

2. Distribution d'échantillonnage d'une fréquence

On considère une population où la fréquence d'un caractère est p et dans laquelle on prélève au hasard N échantillons de taille n.
La liste des fréquences f_1 ; f_2 ; f_3 ; $\ldots$; f_N du caractère obtenue sur les N échantillons constitue une distribution d'échantillonnage de la fréquence étudiée.

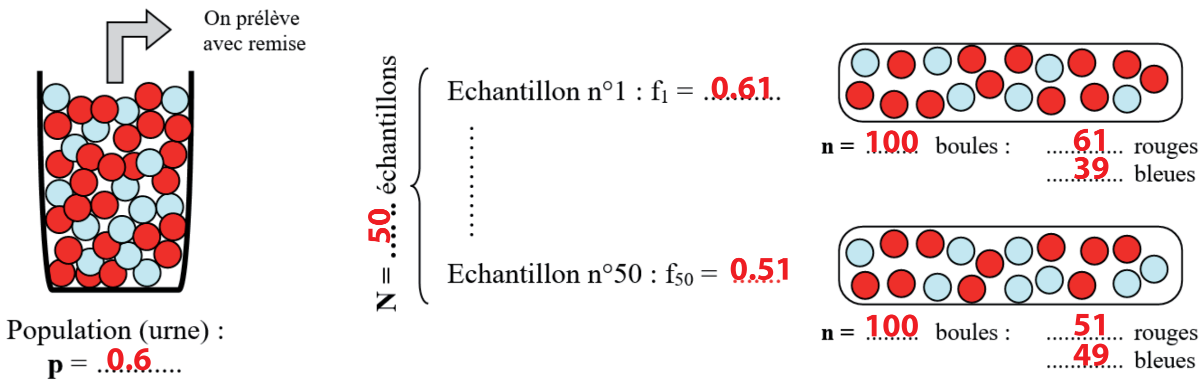
Exemple :
Une urne contient 60 % de boules rouges et 40 % de boules bleues. On prélève avec remise $N = 50$ échantillons aléatoires de même taille $n = 100$.

– Quelle est la fréquence p du caractère "boule rouge" dans l'urne ?
$p = 0.60$ car il y a 60% de boules rouges dans l'urne.

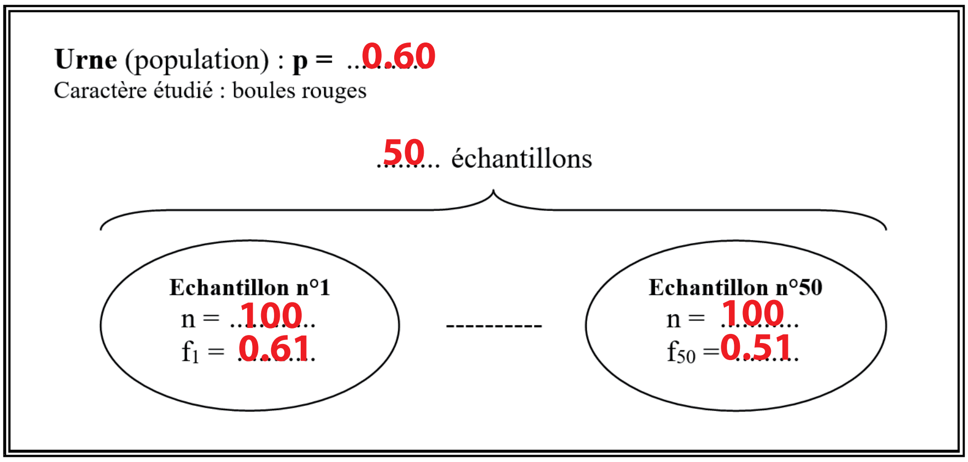
– Obtient-on la même fréquence f des boules rouges dans chaque échantillon ?
Non, car la fréquence des boules rouges fluctue selon les échantillons.

– On obtient la distribution d'échantillonnage de la fréquence des boules rouges suivantes :

Numéro échantillon	1	2	3	4	5	...	47	48	49	50
Fréquence f_i des rouges	0.61	0.60	0.64	0.53	0.6	...	0.55	0.62	0.6	0.51



Un schéma utile pour bien faire la différence entre p et les différentes valeurs de f_i :



3. Fréquence moyenne d'une distribution d'échantillonnage

La fréquence moyenne $\overline{f}$ d'une distribution d'échantillonnage est donnée par la formule :

$$\overline{f} = \frac{\text{Somme des } f_i}{N}$$

avec N : le nombre d'échantillons
et f_i : la fréquence de l'échantillon i

Exemple :
Le tableau suivant donne a fréquence d'apparition de la face 6 dans 5 échantillons de 100 lancers d'un dé cubique :

Échantillon : i	1	2	3	4	5
Fréquence de l'échantillon f_i	0.15	0.16	0.19	0.17	0.13

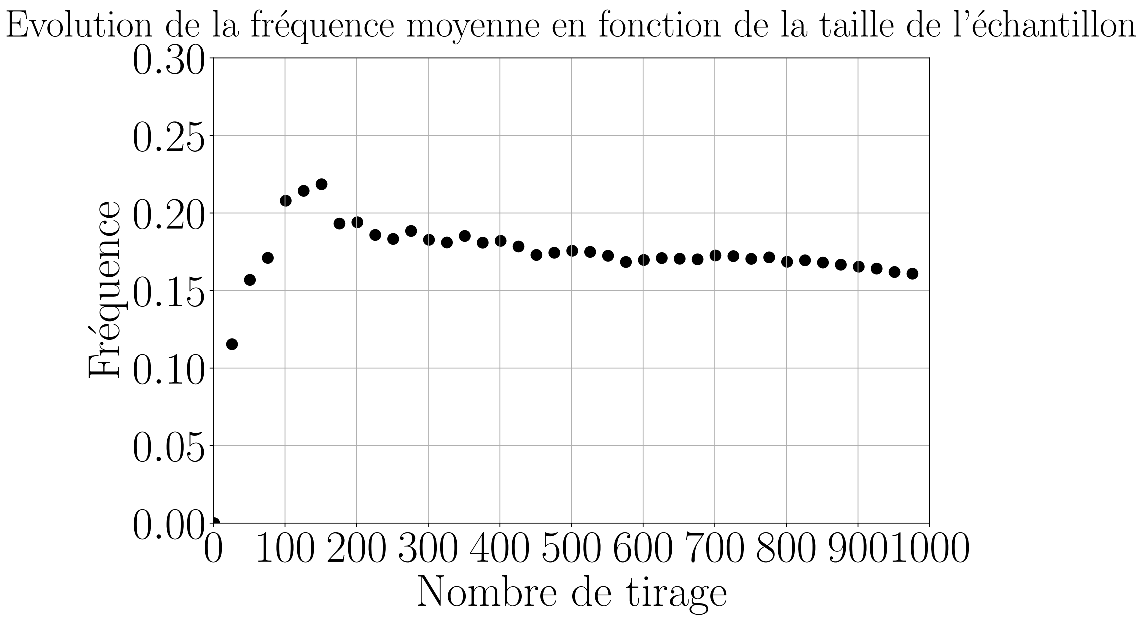
Calculer la fréquence moyenne de la distribution d'échantillonnage :

$$\overline{f} = \frac{f_1+f_2+f_3+f_4+f_5}{N} = \frac{0.15+0.16+0.19+0.17+0.13}{5} = 0.16$$

À retenir

Lorsque la taille n des échantillons ou le nombre N d'échantillons est assez important, la fréquence moyenne $\overline{f}$ de la distribution d'échantillonnage est très proche de la fréquence p dans la population.

Exemple :
On s'intéresse à la fréquence de sortie de la face 2 dans le lancer d'un dé cubique. On réalise $N = 10$ échantillons. La taille n de chaque échantillon varie de 1 à 1 000. Le graphique ci-contre montre l'évolution de la fréquence moyenne en fonction de la taille de l'échantillon.



Qu'observe t-on ? Donner une explication
On observe que la fréquence moyenne tend à se stabiliser vers une valeur plsu légèrement supérieur à 0.15. Cette valeur correspond à la probabilité d'obtenir un 4 avec un dé cubique soit 1/6=0.1666.

4. Intervalle de fluctuation à 95%

On s'intéresse à un caractère dont on connaît la fréquence p dans la population totale.

Sous certaines conditions (n assez grand et p ni très petit ni très grand), la probabilité qu'une fréquence du caractère étudié sur un échantillon de taille n appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, est supérieur à 95% .

Autre formulation possible :

Sous certaines conditions (n assez grand et p ni très petit ni très grand), au moins 95% des échantillons de taille n ont une fréquence du caractère étudié comprise entre $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Pourquoi fait-on cela ?

Cela permet de pouvoir exercer un regard critique sur les données statistiques.

En effet, la connaissance de cette condition permet de vérifier si hasard peut ou non expliquer l'écart entre la fréquence f de l'échantillon et la fréquence p dans la population.

• Dans le cas où la fréquence f de l'échantillon est comprise dans l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on pourra conclure que le hasard peut expliquer la différence entre f et p.

• Dans le cas où la fréquence f de l'échantillon n'est pas comprise dans l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on pourra conclure que la différence entre f et p ne résultat pas du simple fait du hasard (avec un risque d'erreur de 5%).

Exemple :

Parmi les 120 salariés d'une entreprise A, seulement 51 sont des femmes. L'entreprise B emploie 2 600 salariés dont 1 222 sont des femmes.

Dans une entreprise, la parité hommes - femmes sous-entend que l'identité sexuelle des personnes n'intervient pas dans leur recrutement.

Le respect de la parité suppose donc théoriquement un même nombre d'hommes et de femmes salariés au sein de l'entreprise.

Laquelle de ces deux entreprises respecte le mieux la parité hommes – femmes ?

Méthode de résolution :

- Analyse de la situation et des paramètres mis en jeu :
- – Quel est le caractère étudié au sein d'une entreprise ?
  Le nombre de femmes.

- – Considérant que le respect de la parité est effectif, quelle est la fréquence p de femmes salariées dans l'entreprise ?
  $p = 0.50$ car 50% de femmes

- – Calculer la fréquence de femmes dans l'entreprise A :
  $f_A = 51/120 = 0.425$ soit 42.5% de femmes.

- – Calculer la fréquence de femmes dans l'entreprise B :
  $f_B = 1222/2600 = 0.47$ soit 47% de femmes.

– Que peut-on en conclure à ce moment là de la résolution ?
On peut penser que l'entreprise B respecte mieux la parité que l'entreprise A étant donné que la fréquence de femmes est la plus proche de 50%.

– Est-ce vraiment le cas ? Quel paramètre n'avons pas encore pris en compte ?
En fait, on ne peut pas encore conclure car ces deux entreprises ont des tailles très différentes.

- Il faut calculer pour chacune de ces deux entreprises leur intervalle de fluctuation à 95 % avant de pouvoir donner la bonne réponse.

– Calculer l'intervalle de fluctuation à 95 % pour l'entreprise A (arrondir au millième) :
$n = 120$ donc l'intervalle est : $\left[0.5 - \frac{1}{\sqrt{120}}; 0.5 + \frac{1}{\sqrt{120}}\right]$, soit $[0.408; 0.592]$ Cela signifie qu'au moins 95 % des entreprises de 120 salariés qui respectent la parité hommes – femmes ont une fréquence de femmes comprises entre 0.408 et 0.592.

– Calculer l'intervalle de fluctuation à 95 % pour l'entreprise B (arrondir au millième) :
$n = 2600$ donc l'intervalle est : $\left[0.5 - \frac{1}{\sqrt{2600}}; 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2600}}\right]$, soit $[0.480; 0.520]$.

Cela signifie qu'au moins 95 % des entreprises de 2 600 salariés qui respectent la parité hommes – femmes ont une fréquence de femmes comprises entre 0.480 et 0.520.

- Conclusion : Quelle entreprise respecte le mieux la parité hommes – femmes ?
$f_A = 0.425$ est comprise dans l'intervalle fluctuation $[0.480; 0.592]$.
$f_B = 0.47$ n'est pas comprise dans l'intervalle de fluctuation $[0.480; 0.520]$.
On peut donc conclure que l'entreprise B est celle qui respecte le mieux la parité hommes-femmes.